Partie 1 : QCM

▶ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Voici des affirmations concernant des bases, des familles de vecteurs, des sous-espaces, des applications linéaires… Pour chacune d'elles, dites si elle est VRAIE (preuve à l'appui) ou FAUSSE (en exhibant un contre-exemple).

Q1 f et g sont deux fonctions de E dans lui-même. Si $f \circ g$ est linéaire, alors f et g sont linéaires.

Q2 Soient G et H deux s.e.v. de E. Si $\dim(G) + \dim(H) = n$, alors G et H sont supplémentaires l'un de l'autre.

Q3 Soient G et H deux s.e.v. de E. Si $\dim(G) + \dim(H) > n$, alors $G \cap H$ ne se réduit pas au vecteur nul.

Q4 Soient G et H deux s.e.v. de E. Si $G \cap H$ ne se réduit pas au vecteur nul, alors $\dim(G) + \dim(H) > n$.

Q5 Si s est une symétrie de E, alors il existe des projecteurs p et q tels que $s = p - q$.

Q6 Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe des projecteurs p et q distincts tels que $s = p - q$, alors s est une symétrie de E.

Q7

Q8

Q9 Soit φ une forme linéaire sur E. Le noyau de φ est un hyperplan de E.

Q10 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les s.e.v. $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires l'un de l'autre.

Q11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{im}(f)\big) = n$, alors f est un projecteur.

Q12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires l'un de l'autre, alors f est un projecteur.

Q13 Il existe plusieurs automorphismes de E qui sont des projecteurs.

Q14 a, b et c sont trois vecteurs de E. Si chacune des familles (a, b), (b, c) et (c, a) est libre, alors la famille (a, b, c) est nécessairement libre.

Partie 2 : questions de bon sens

Q1 a, b, c, u et v spnt cinq vecteurs de $\mathbb{K}^4$. Si les familles (a, b, c) et (u, v) sont libres, quel est la dimension de $\mathrm{Vect}(a, b, c) \cap \mathrm{Vect}(u, v)$? On apprend que la famille (a, b, c) est de rang 2 et que la famille (u, v) est de rang 1 ; quelles sont les valeurs possibles du rang de la famille (a, b, c, u, v) ?

Q2 Construisez un endomorphisme f de $\mathbb{K}^9$ vérifiant $\mathrm{rg}(f) = 7$ et $\mathrm{rg}(f^3) = 3$.

Q3 Construisez un endomorphisme g de $\mathbb{K}^9$ vérifiant $\mathrm{rg}(g) = 7$ et $\mathrm{rg}(g^3) = 5$.

Q4 Construisez un endomorphisme h de $\mathbb{K}^9$ vérifiant $\mathrm{rg}(h) = 7$ et $\mathrm{rg}(h^2) = 6$.

Q5 La base canonique de $\mathbb{K}^4$ est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Notons $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3, e_1 + 2e_3 + e_4)$. Quelle est la dimension de G ? Exhibez un supplémantaire de G.