$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Exercices : algèbre linéaire (9)}}$

► La feuille suivante porte sur la définition, puis les propriétés d'une application linéaire ; pour chaque exercice, la fonction est choisie différemment.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient a, b, c, d quatre réels. Notons $g_{a,b,c,d}$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x) + cx\cos(x) + dx\sin(x))e^{-x}$, et E l'ensemble des $g_{a,b,c,d}$ où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$. Montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v. Notons $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)e^{-x}$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)e^{-x}$, $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto x\cos(x)e^{-x}$ et $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto x\sin(x)e^{-x}$; montrez que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E. Montrez que $D : f \mapsto f'$ est un automorphisme de E ; donnez l'expression analytique de D^{-1} dans la base $\mathcal{B}$. (Source : Bac C Strasbourg 1982)

► Le sujet nous propose de noter $g_{a,b,c,d}$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x) + cx\cos(x) + dx\sin(x))e^{-x}$. Soient $h = g_{a,b,c,d}$, $k = g_{a',b',c',d'}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned}
(h + \lambda k)(x) &= h(x) + \lambda k(x) = g_{a,b,c,d}(x) + \lambda g_{a',b',c',d'}(x) \\
&= (a\cos(x) + b\sin(x) + cx\cos(x) + dx\sin(x))e^{-x} + \lambda(a'\cos(x) + b'\sin(x) + c'x\cos(x) + d'x\sin(x))e^{-x} \\
&= \big((a + \lambda a')\cos(x) + (b + \lambda b')\sin(x) + (c + \lambda c')x\cos(x) + (d + \lambda d')x\sin(x)\big)e^{-x} \\
&= \big(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma x\cos(x) + \delta x\sin(x)\big)e^{-x}
\end{aligned}$$

Or la dernière fonction écrite est, au facteur e^{-x} près, une combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3 et f_4.

► La famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est libre ; en effet, $e^{-x}\big(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x)\big) = 0$ ssi $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x) = 0$. Observons que f_1 et f_4 sont paires, cependant que f_2 et f_3 sont impaires. Pour $x = 0$, les termes en f_2, f_3 et f_4 s'éliminent : donc $a = 0$. Par raison de parité, le coefficient devant f_4 s'élimine lui aussi. Il nous reste $f_2(x) + xf_3(x) = 0$, soit $\beta\sin(x) + \gamma x\cos(x) = 0$; pour $x = \pi$, nous obtenons $\gamma = 0$; du coup, il reste $\beta\sin(x) = 0$, qui est nul pour $x = \pi/2$ par exemple. Concluons : $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ est libre}}$.

► Une méthode plus rapide consiste à écrire le développement limité de $x \mapsto (\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4)(x)$, à l'ordre 3, au voisinage de 0.

► Observons que $f_1' = -f_1 - f_2$; $f_2' = f_1 - f_2$; $f_3' = f_1 - f_3 - f_4$; et $f_4' = f_2 + f_3 - f_4$. Donc l'image par D de toute combinaison linéaire des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 est elle-même une combinaison linéaire de ces fonctions. Donc D est un automorphisme du s.e.v. $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Fixons $a \in \mathbb{R}$. Notons Φ_a la fonction du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans lui-même définie comme suit : pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\big(\Phi_a(f)\big)(x) = f(x-a)$. Prouvez que $\Phi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$, puis que $a \mapsto \Phi_a$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, 0)$. Prouvez que $\Phi_a \in GL(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$.

► $\boxed{\Phi_a \text{ est linéaire}}$: soient f et g appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\Phi_a(f + \lambda g) = \Phi_a(f) + \lambda\Phi_a(g)$. Pour tout réel x, nous aurons :

$$\big(\Phi_a(f + \lambda g)\big)(x) = (f + \lambda g)(x - a) = f(x - a) + \lambda g(x - a) = \Phi_a(f)(x) + \lambda\Phi_a(g)(x) = \big(\Phi_a(f) + \lambda\Phi_a(g)\big)(x)$$

► $\boxed{a \mapsto \Phi_a \text{ est un morphisme}}$: soient a et b deux réels ; prouvons que $\Phi_{a+b} = \Phi_a \circ \Phi_b$, autrement dit : pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\Phi_{a+b}(x) = \Phi_a(x) \circ \Phi_b(x)$. Soit x réel quelconque ; alors

$$\begin{aligned}
\big(\Phi_a \circ \Phi_b)(f)\big)(x) &= \big(\Phi_a(\Phi_b(x))\big) = \Phi_a\big(f(x - b)\big) = f\big((x - b) - a\big) \\
&= f(x - b - a) = f\big(x - (a + b)\big) = \big(\Phi_{a+b}(f)\big)(x)
\end{aligned}$$

► $\boxed{\Phi_a \in GL(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})}$: il suffit d'exhiber l'inverse de Φ_a, qui est clairement Φ_{-a}, ce qui revient à établir $\Phi_a \circ \Phi_{-a} = \Phi_{-a} \circ \Phi_a = \Phi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Or, comme $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\big(\Phi_0(f)\big)(x) = f(x - 0) = f(x) = \big(\text{id}_{\mathbb{R}}(f)\big)(x)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ E est le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Notons φ la fonction qui, à $f \in E$, associe $\varphi(f)$ définie comme suit : pour tout réel x, $\big(\varphi(f)\big)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$. Prouvez que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

▶ $\big(\varphi(f)\big)(x) = F(x+1) - F(x-1)$ où F désigne *une* primitive sur $\mathbb{R}$ de f. La fonction F est dérivable, et à plus forte raison continue, donc $\varphi(f) \in E$. Vérifions que φ est linéaire : $\varphi(f+\lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$. Soit x un réel quelconque :

$$\begin{aligned}\big(\varphi(f+\lambda g)\big)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} (f+\lambda g)(t)\,dt = \int_{x-1}^{x+1} \big(\varphi(f)(t) + \lambda\varphi(g)(t)\big)\,dt \\ &= \int_{x-1}^{x+1} \varphi(f)(t) + \lambda \int_{x-1}^{x+1} \varphi(g)(t) = \big(\varphi(f)\big)(x) + \lambda\big(\varphi(g)\big)(x) = \big(\varphi(f) + \lambda\varphi(g)\big)(x)\end{aligned}$$

▶ Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\pi x)$; alors $\big(\varphi(f)\big)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} \cos(\pi t)\,dt = \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{\sin(\pi x + \pi) - \sin(\pi x - \pi)}{\pi} = 0.$ Donc $\varphi(f) = \mathbf{0}$, or $f \neq \mathbf{0}$ donc $\ker(\varphi) \neq \{\overrightarrow{0}\}$, ce qui revient à dire que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$.

▶ Il existe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même qui sont continues, mais non dérivables ; par exemple, $x \mapsto |x|$ convient : une telle fonction appartient à E, mais n'est pas dans $\mathrm{im}(\varphi)$. Donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective}}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $f_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$. Soit $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Prouvez que la famille $(f_{\alpha_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. *Indication* : observez ce qui se passe lorsque $t \to -\infty$.

▶ Avec l'hypothèse, nous pouvons supposer que les α_k sont tous non nuls et classés par ordre croissant : $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. De la relation $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k e^{\alpha_k t} = 0$, nous déduisons $\lambda_1 e^{\alpha_1 t} = -\displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \lambda_k e^{\alpha_k t}$, puis $\lambda_1 = -\displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \lambda_k e^{(\alpha_k - \alpha_1)t}$. Observons que le membre de gauche est une constante non nulle ; et que, lorsque t tend vers $-\infty$, le membre de droite tend vers 0. Ceci est contradictoire, donc $\lambda_1 = 0$. Une récurrence facile montre ensuite que les λ_k sont tous nuls.

$\boxed{\text{Q5}}$ $\star$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. g est un endomorphisme de E. Notons g^k le k-ième itéré de g. Montrez que, s'il existe une famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de scalaires vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k g^k = \mathbf{0}$ et $a_0 \neq 0$, alors g est bijectif.

▶ Nous pouvons SPDG supposer les a_k tous non nuls, deux à deux distincts et classés par ordre croissant : $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Alors $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k g^k = \mathbf{0}$, soit $a_0 g^0 = -\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k g^k$. Appliquons la fonction g^{n-1} aux deux membres ; il vient $a_0 g^{n-1} = \mathbf{0}$, donc $a_0 = 0$. Ensuite, une récurrence nous donne $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Même question, en utilisant cette fois la famille $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ où g_k est la fonction $t \mapsto |t - \alpha_k|$.

▶ Ici encore, nous pouvons supposer que les λ_k sont tous non nuls, deux à deux distincts et classés par ordre croissant : $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Nous définissons ainsi la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k g_k(t)$; donc $\lambda_1 g_1(t) = -\displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \lambda_k g_k(t)$. Observons que la fonction g_1 n'est pas dérivable en α_1 ; par contre, la fonction $t \mapsto -\displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \lambda_k g_k(t)$ est dérivable en α_1. Ceci mène à une contradiction : donc $\lambda_1 = 0$. Par récurrence, tous les λ_k sont nuls.

$\boxed{\text{Q7}}$ $\star$ f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E non réduit à une droite. Supposons que la restriction de f à tout s.e.v. de E autre que E lui-même soit injective. Montrez que f est injectif.

▶ Fixons $x \neq \overrightarrow{0}$; notons λ_x le rapport de l'homothétie qui envoie x sur $\lambda_x x$. Prouvons que f est l'homothétie de rapport λ_x. Soit $y \in E$; s'il existe α tel que $y = \alpha x$, alors $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_x \alpha x = \lambda_x y$. Sinon, comme $x \neq \overrightarrow{0}$, les vecteurs x et y sont indépendants. Soient λ_y et λ_{x+y} définis par $f(y) = \lambda_y y$ et $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$. Nous pouvons écrire $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, donc $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$; comme x et y sont indépendants, il vient $\lambda_x = \lambda_{x+y}$ et $\lambda_y = \lambda_{x+y}$. Donc $\lambda_x = \lambda_y$, et par suite $f(y) = \lambda_x y$.

$\boxed{\text{Q8}}$ **Voir aussi l'exercice Q4**. Soient $n \geqslant 1$ et $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons f_k la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\lambda_k t)$. Montrez que la famille $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre. En déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension infinie.

- Si les coefficients λ_k sont tous nuls, il n'y a rien à démontrer. Sinon, nous pouvons supposer que les λ_k sont tous non nuls, après regroupement des coefficients identiques et élimination des coefficients nuls. Nous pouvons ainsi supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, donc $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k f_k = \mathbf{0}$. En divisant par $\lambda_1 \neq 0$, il vient $f_1 = -\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \lambda_k f_k$, donc $f_1(x) = -\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \lambda_k f_k(x)$; Faisons tendre x vers $-\infty$: le membre de droite de l'égalité tend vers 0, mais le membre de gauche est constant, non nul. Il y a une contradiction : donc $\lambda_1 = 0$. Par récurrence, nous pouvons rendre nuls tous les λ_k, ce qui termine la preuve.
- Pour tout naturel n, nous pouvons exhiber une famille de fonctions de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\lambda_k t)$, les λ_k étant tous distincts. Nous pouvons donc constituer des familles libres de taille arbitrairement grande. Donc $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ contient un s.e.v. de dimension infinie ; par exemple, la famille des fonctions de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(nt)$ avec $n \in \mathbb{N}$, répond à la question.

$\boxed{\text{Q9}}$ Donnez des exemples de sous-espaces de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ stables par l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$. Donnez aussi des exemples de s.e.v. qui ne sont pas stables par D.

- Dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions polynômes ; l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$; l'ensemble des fonctions qui vérifient $f(0) = 0$; l'ensemble des fonctions f telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- Toujours dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: les fonctions croissantes ; les fonctions monotones ; les fonctions de signe constant.

Un mini-problème

- E désigne l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Notons Φ la fonction qui, à $f \in E$, associe $\Phi(f) = f + f'$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que Φ est un endomorphisme de E.

- $\Phi(f + \lambda g) = (f + \lambda g) + (f + \lambda g)' = f + \lambda g + f' + \lambda g' = f + f' + \lambda(g + g') = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$. Ceci prouve la linéarité de Φ.

$\boxed{\text{Q2}}$ Φ est-il injectif ?

- NON : par exemple la fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ vérifie $f + f' = \mathbf{0}$, et pourtant $f \neq \mathbf{0}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Φ est-il surjectif ? Indication pour cette question : observez $t \in \mathbb{R} \mapsto e^t f(t)$.

- NON : la fonction $t \mapsto e^{-t}$ et la fonction nulle ont pour dérivée la fonction nulle.

$\boxed{\text{Q4}}$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = \mathbf{0}$ et $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$. Montrez qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ tel que la famille $\big(f^k(\vec{v})\big)_{0\leqslant k<n}$ soit une base de E.

- Si $r \geqslant p$, alors $f^r(\vec{v}) = f^{r-p}\big(f^p(\vec{v}) = f^{r-p}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Sinon, il existe $\vec{v}$ vérifiant $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \overrightarrow{0}$ et $f^n(\vec{v}) = \overrightarrow{0}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les λ_k sont tous non nuls et deux à deux distincts ; notons-les $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$. Alors $\sum_{0\leqslant k<p} \lambda_k f(\vec{v}) = 0$, que l'on écrit plutôt $\lambda_0 \vec{v} = -\sum_{1\leqslant k<p} \lambda_k f(\vec{v})$. En composant des deux côtés par f^{p-1}, il vient $\lambda_0 f^{p-1}(\vec{v}) = \overrightarrow{0}$, donc $\lambda_0 = 0$. Une récurrence facile nous montre ensuite que tous les λ_k sont nuls.