

- La feuille suivante porte sur la définition, puis les propriétés d'une application linéaire ; pour chaque exercice, la fonction est choisie différemment.

Q1 Soient a, b, c, d quatre réels. Notons $g_{a,b,c,d}$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos(x) + b \sin(x) + cx \cos(x) + dx \sin(x))e^{-x}$, et E l'ensemble des $g_{a,b,c,d}$ où a, b, c et d décrivent \mathbb{R} . Montrez que E est un \mathbb{R} -e.v. Notons $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)e^{-x}$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)e^{-x}$, $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \cos(x)e^{-x}$ et $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \sin(x)e^{-x}$; montrez que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E . Montrez que $D : f \mapsto f'$ est un automorphisme de E ; donnez l'expression analytique de D^{-1} dans la base \mathcal{B} . (Source : Bac C Strasbourg 1982)

- Le sujet nous propose de noter $g_{a,b,c,d}$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos(x) + b \sin(x) + cx \cos(x) + dx \sin(x))e^{-x}$. Soient $h = g_{a,b,c,d}$, $k = g_{a',b',c',d'}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned} (h + \lambda k)(x) &= h(x) + \lambda k(x) = g_{a,b,c,d}(x) + \lambda g_{a',b',c',d'}(x) \\ &= (a \cos(x) + b \sin(x) + cx \cos(x) + dx \sin(x))e^{-x} + \lambda(a' \cos(x) + b' \sin(x) + c'x \cos(x) + d'x \sin(x))e^{-x} \\ &= ((a + \lambda a') \cos(x) + (b + \lambda b') \sin(x) + (c + \lambda c')x \cos(x) + (d + \lambda d')x \sin(x))e^{-x} \\ &= (\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma x \cos(x) + \delta x \sin(x))e^{-x} \end{aligned}$$

Or la dernière fonction écrite est, au facteur e^{-x} près, une combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3 et f_4 .

- La famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est libre ; en effet, $e^{-x}(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x)) = 0$ ssi $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x) = 0$. Observons que f_1 et f_4 sont paires, cependant que f_2 et f_3 sont impaires. Pour $x = 0$, les termes en f_2, f_3 et f_4 s'éliminent : donc $a = 0$. Par raison de parité, le coefficient devant f_4 s'élimine lui aussi. Il nous reste $f_2(x) + x f_3(x) = 0$, soit $\beta \sin(x) + \gamma x \cos(x) = 0$; pour $x = \pi$, nous obtenons $\gamma = 0$; du coup, il reste $\beta \sin(x) = 0$, qui est nul pour $x = \pi/2$ par exemple. Concluons : la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est libre.

- Une méthode plus rapide consiste à écrire le développement limité de $x \mapsto (\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4)(x)$, à l'ordre 3, au voisinage de 0.
- Observons que $f'_1 = -f_1 - f_2$; $f'_2 = f_1 - f_2$; $f'_3 = f_1 - f_3 - f_4$; et $f'_4 = f_2 + f_3 - f_4$. Donc l'image par D de toute combinaison linéaire des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 est elle-même une combinaison linéaire de ces fonctions. Donc D est un automorphisme du s.e.v. $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Q2 Fixons $a \in \mathbb{R}$. Notons Φ_a la fonction du \mathbb{R} -e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans lui-même définie comme suit : pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $(\Phi_a(f))(x) = f(x-a)$. Prouvez que $\Phi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$, puis que $a \mapsto \Phi_a$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, 0)$. Prouvez que $\Phi_a \in GL(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$.

- Φ_a est linéaire : soient f et g appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\Phi_a(f + \lambda g) = \Phi_a(f) + \lambda \Phi_a(g)$. Pour tout réel x , nous aurons :

$$(\Phi_a(f + \lambda g))(x) = (f + \lambda g)(x - a) = f(x - a) + \lambda g(x - a) = \Phi_a(f)(x) + \lambda \Phi_a(g)(x) = (\Phi_a(f) + \lambda \Phi_a(g))(x)$$

- $a \mapsto \Phi_a$ est un morphisme : soient a et b deux réels ; prouvons que $\Phi_{a+b} = \Phi_a \circ \Phi_b$, autrement dit : pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\Phi_{a+b}(x) = \Phi_a(x) \circ \Phi_b(x)$. Soit x réel quelconque ; alors

$$\begin{aligned} (\Phi_a \circ \Phi_b)(f)(x) &= (\Phi_a(\Phi_b(x))) = \Phi_a(f(x-b)) = f((x-b) - a) \\ &= f(x-b-a) = f(x - (a+b)) = (\Phi_{a+b}(f))(x) \end{aligned}$$

- $\Phi_a \in GL(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$: il suffit d'exhiber l'inverse de Φ_a , qui est clairement Φ_{-a} , ce qui revient à établir $\Phi_a \circ \Phi_{-a} = \Phi_{-a} \circ \Phi_a = \Phi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Or, comme $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $x \in \mathbb{R}$, nous avons $(\Phi_0(f))(x) = f(x-0) = f(x) = (\text{id}_{\mathbb{R}}(f))(x)$.

Q3 E est le \mathbb{R} -e.v. des fonctions continues de \mathbb{R} dans lui-même. Notons φ la fonction qui, à $f \in E$, associe $\varphi(f)$ définie comme suit : pour tout réel x , $(\varphi(f))(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$. Prouvez que φ est un endomorphisme de E . Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

- $(\varphi(f))(x) = F(x+1) - F(x-1)$ où F désigne une primitive sur \mathbb{R} de f . La fonction F est dérivable, et à plus forte raison continue, donc $\varphi(f) \in E$. Vérifions que φ est linéaire : $\varphi(f + \lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$. Soit x un réel quelconque :

$$\begin{aligned} (\varphi(f + \lambda g))(x) &= \int_{x-1}^{x+1} (f + \lambda g)(t) dt = \int_{x-1}^{x+1} (\varphi(f)(t) + \lambda\varphi(g)(t)) dt \\ &= \int_{x-1}^{x+1} \varphi(f)(t) dt + \lambda \int_{x-1}^{x+1} \varphi(g)(t) dt = (\varphi(f))(x) + \lambda(\varphi(g))(x) = (\varphi(f) + \lambda\varphi(g))(x) \end{aligned}$$

- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\pi x)$; alors $(\varphi(f))(x) = \int_{x-1}^{x+1} \cos(\pi t) dt = \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi t) \right]_{x-1}^{x+1} = \frac{\sin(\pi x + \pi) - \sin(\pi x - \pi)}{\pi} = 0$.
Donc $\varphi(f) = \mathbf{0}$, or $f \neq \mathbf{0}$ donc $\ker(\varphi) \neq \{\vec{0}\}$, ce qui revient à dire que φ n'est pas injective.
- Il existe des fonctions de \mathbb{R} dans lui-même qui sont continues, mais non dérivables ; par exemple, $x \mapsto |x|$ convient : une telle fonction appartient à E , mais n'est pas dans $\text{im}(\varphi)$. Donc φ n'est pas surjective.

Q4 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $f_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$. Soit $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Prouvez que la famille $(f_{\alpha_k})_{1 \leq k \leq n}$ est libre dans le \mathbb{R} -e.v. $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. *Indication* : observez ce qui se passe lorsque $t \rightarrow -\infty$.

- Avec l'hypothèse, nous pouvons supposer que les α_k sont tous non nuls et classés par ordre croissant : $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. De la relation $\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k e^{\alpha_k t} = 0$, nous déduisons $\lambda_1 e^{\alpha_1 t} = - \sum_{2 \leq k \leq n} \lambda_k e^{\alpha_k t}$, puis $\lambda_1 = - \sum_{2 \leq k \leq n} \lambda_k e^{(\alpha_k - \alpha_1)t}$.
Observons que le membre de gauche est une constante non nulle ; et que, lorsque t tend vers $-\infty$, le membre de droite tend vers 0. Ceci est contradictoire, donc $\lambda_1 = 0$. Une récurrence facile montre ensuite que les λ_k sont tous nuls.

Q5 ★ E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. g est un endomorphisme de E . Notons g^k le k -ième itéré de g . Montrez que, s'il existe une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de scalaires vérifiant $\sum_{k=0}^n a_k g^k = \mathbf{0}$ et $a_0 \neq 0$, alors g est bijectif.

- Nous pouvons SPDG supposer les a_k tous non nuls, deux à deux distincts et classés par ordre croissant : $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Alors $\sum_{0 \leq k \leq n} a_k g^k = \mathbf{0}$, soit $a_0 g^0 = - \sum_{1 \leq k \leq n} a_k g^k$. Appliquons la fonction g^{n-1} aux deux membres ; il vient $a_0 g^{n-1} = \mathbf{0}$, donc $a_0 = 0$. Ensuite, une récurrence nous donne $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q6 Même question, en utilisant cette fois la famille $(g_k)_{1 \leq k \leq n}$ où g_k est la fonction $t \mapsto |t - \alpha_k|$.

- Ici encore, nous pouvons supposer que les λ_k sont tous non nuls, deux à deux distincts et classés par ordre croissant : $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Nous définissons ainsi la fonction $t \mapsto \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k g_k(t)$; donc $\lambda_1 g_1(t) = - \sum_{2 \leq k \leq n} \lambda_k g_k(t)$. Observons que la fonction g_1 n'est pas dérivable en α_1 ; par contre, la fonction $t \mapsto - \sum_{2 \leq k \leq n} \lambda_k g_k(t)$ est dérivable en α_1 . Ceci mène à une contradiction : donc $\lambda_1 = 0$. Par récurrence, tous les λ_k sont nuls.

Q7 ★ f est un endomorphisme d'un \mathbb{K} -e.v. E non réduit à une droite. Supposons que la restriction de f à tout s.e.v. de E autre que E lui-même soit injective. Montrez que f est injectif.

- Fixons $x \neq \vec{0}$; notons λ_x le rapport de l'homothétie qui envoie x sur $\lambda_x x$. Prouvons que f est l'homothétie de rapport λ_x . Soit $y \in E$; s'il existe α tel que $y = \alpha x$, alors $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x \alpha x = \lambda_x y$. Sinon, comme $x \neq \vec{0}$, les vecteurs x et y sont indépendants. Soient λ_y et λ_{x+y} définis par $f(y) = \lambda_y y$ et $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$. Nous pouvons écrire $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, donc $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$; comme x et y sont indépendants, il vient $\lambda_x = \lambda_{x+y}$ et $\lambda_y = \lambda_{x+y}$. Donc $\lambda_x = \lambda_y$, et par suite $f(y) = \lambda_x y$.

Q8 Voir aussi l'exercice Q4. Soient $n \geq 1$ et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons f_k la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\lambda_k t)$. Montrez que la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre. En déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -e.v. de dimension infinie.

- Si les coefficients λ_k sont tous nuls, il n'y a rien à démontrer. Sinon, nous pouvons supposer que les λ_k sont tous non nuls, après regroupement des coefficients identiques et élimination des coefficients nuls. Nous pouvons ainsi supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, donc $\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k f_k = \mathbf{0}$. En divisant par $\lambda_1 \neq 0$, il vient $f_1 = - \sum_{2 \leq k \leq n} \lambda_k f_k$, donc

$f_1(x) = - \sum_{2 \leq k \leq n} \lambda_k f_k(x)$; Faisons tendre x vers $-\infty$: le membre de droite de l'égalité tend vers 0, mais le membre de

gauche est constant, non nul. Il y a une contradiction : donc $\lambda_1 = 0$. Par récurrence, nous pouvons rendre nuls tous les λ_k , ce qui termine la preuve.

- Pour tout naturel n , nous pouvons exhiber une famille de fonctions de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\lambda_k t)$, les λ_k étant tous distincts. Nous pouvons donc constituer des familles libres de taille arbitrairement grande. Donc $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ contient un s.e.v. de dimension infinie ; par exemple, la famille des fonctions de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(nt)$ avec $n \in \mathbb{N}$, répond à la question.

Q9 Donnez des exemples de sous-espaces de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ stables par l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$. Donnez aussi des exemples de s.e.v. qui ne sont pas stables par D .

- Dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions polynômes ; l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur \mathbb{R} ; l'ensemble des fonctions qui vérifient $f(0) = 0$; l'ensemble des fonctions f telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- Toujours dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: les fonctions croissantes ; les fonctions monotones ; les fonctions de signe constant.

Un mini-problème

- E désigne l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Notons Φ la fonction qui, à $f \in E$, associe $\Phi(f) = f + f'$.

Q1 Montrez que Φ est un endomorphisme de E .

- $\Phi(f + \lambda g) = (f + \lambda g) + (f + \lambda g)' = f + \lambda g + f' + \lambda g' = f + f' + \lambda(g + g') = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$. Ceci prouve la linéarité de Φ .

Q2 Φ est-il injectif ?

- NON : par exemple la fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ vérifie $f + f' = \mathbf{0}$, et pourtant $f \neq \mathbf{0}$.

Q3 Φ est-il surjectif ? Indication pour cette question : observez $t \in \mathbb{R} \mapsto e^t f(t)$.

- NON : la fonction $t \mapsto e^{-t}$ et la fonction nulle ont pour dérivée la fonction nulle.

Q4 E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension n . Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = \mathbf{0}$ et $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$. Montrez qu'il existe un vecteur \vec{v} tel que la famille $(f^k(\vec{v}))_{0 \leq k < n}$ soit une base de E .

- Si $r \geq p$, alors $f^r(\vec{v}) = f^{r-p}(f^p(\vec{v})) = f^{r-p}(\vec{0}) = \vec{0}$. Sinon, il existe \vec{v} vérifiant $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$ et $f^n(\vec{v}) = \vec{0}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les λ_k sont tous non nuls et deux à deux distincts ; notons-les $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$. Alors $\sum_{0 \leq k < p} \lambda_k f^k(\vec{v}) = \mathbf{0}$, que l'on écrit plutôt $\lambda_0 \vec{v} = - \sum_{1 \leq k < p} \lambda_k f^k(\vec{v})$. En composant des deux côtés par f^{p-1} , il vient $\lambda_0 f^{p-1}(\vec{v}) = \vec{0}$, donc $\lambda_0 = 0$. Une récurrence facile nous montre ensuite que tous les λ_k sont nuls.