$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Exercices : algèbre linéaire (8)}}$

$\boxed{\text{Q1}}$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. f un endomorphisme de E. Comparez $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$, puis $\mathrm{im}(f)$ et $\mathrm{im}(f^2)$. Dans chacun des cas, donnez un exemple où l'inclusion est stricte.

- $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker(f^2)$. Donc $\boxed{\ker(f) \subset \ker(f^2}$.
- Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de E ; alors $\dim\big(\ker(f^k)\big) = n - k$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donc $\dim(E) = \dim\big(\ker(f^0)\big) < \dim\big(\ker(f^1)\big) < \cdots < \dim\big(\ker(f^{n-1})\big) < \dim\big(\ker(f^n)\big) = 0$. Cette suite d'inclusions est stricte.
- $y \in \mathrm{im}(f^2) \Rightarrow \exists x \in E :\ y = f^2(x) \Rightarrow \exists x \in E :\ y = f\big(f(x)\big) \Rightarrow y$ est l'image par f de $f(x) \in E \ \Rightarrow y \in \mathrm{im}(f)$. Donc $\boxed{\mathrm{im}(f^2) \subset \mathrm{im}(f)}$.
- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la même que précédemment, tout comme la condition sur f. Nous avons donc $\mathrm{rg}(f) = n - 1$, $\mathrm{rg}(f^2) = n - 2$ et ainsi de suite jusqu'à $\mathrm{rg}(f^{n-1}) = 1$; et enfin $\mathrm{rg}(f^n) = 0$. L'inclusion $\mathrm{im}(f^n) \subset \mathrm{im}(f^{n-1}) \subset \cdots \subset \mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(\mathrm{id}) = E$ est stricte. Au passage, nous constatons que f est nilpotente, et que son indice de nilpotence est n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Sous les mêmes hypothèses, montrez l'équivalence des trois assertions :

$$\underbrace{\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^2)}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{\ker(f) = \ker(f^2)}_{B} \Leftrightarrow \underbrace{E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)}_{C}$$

- Observons qu'il suffit de prouver successivement $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow A$.
- $\boxed{A \Rightarrow B}$: nous avons $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, il suffit de montrer que $\dim\big(\ker(f)\big) = \dim\big(\ker(f^2)\big)$; le théorème du rang nous donne $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{im}(f^2)\big) = \mathrm{rg}(f^2)$. Par ailleurs, $\mathrm{rg}(f) + \dim\big(\ker(f)\big) = \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f^2) + \dim\big(\ker(f^2)\big) = \dim(E)$, donc $\dim\big(\ker(f)\big) = \dim\big(\ker(f^2)\big)$ ce qui achève la preuve.
- $\boxed{B \Rightarrow C}$: cette fois, il suffit de montrer que $E = \dim\big(\ker(f)\big) \oplus \dim\big(\mathrm{im}(f)\big)$. La première égalité résulte du théorème du rang. Pour la deuxième : $y \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f) \Rightarrow \exists x \in E :\ y = f(x)$ et $f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f^2(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x \in \ker(f^2) = \ker(f) \Rightarrow f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x = f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$
- $\boxed{C \Rightarrow A}$: comme $\mathrm{im}(f^2) \subset \mathrm{im}(f)$, il suffit d'établir $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(f^2)$. Soit $y \in \mathrm{im}(f)$, montrons que $y \in \mathrm{im}(f^2)$. Il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$. Mais $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires dans E : donc il existe $y \in \mathrm{im}(f)$ et $z \in \ker(f)$ tels qu'il existe $u \in E$ vérifiant $y = f(u)$ et $x = y + z = f(u) + z$; alors :
$$u = f(u) = f\big(f(u) + z\big) = f^2(u) + f(z) = f^2(u) \Rightarrow u \in \mathrm{im}(f^2) \Rightarrow \mathrm{im}(f) \subset \big(\mathrm{im}(f^2)\big)$$