Sup PCSI2 — Exercices : algèbre linéaire (7)

Q1 Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n et g un endomorphisme de E. Les assertions $\boxed{n \text{ est pair}}$ et $\boxed{\ker(f) = \operatorname{im}(f)}$ sont-elles équivalentes ?

Q2 Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et g un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = f^2 + f$. Montrez que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$. Indication : observez $f \circ (f^2 - f - \mathrm{id})$.

Q3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$, vérifiant les propriétés suivantes : $f^3 = \mathbf{0}$; il existe un vecteur a tel que $f^2(a) \neq \overrightarrow{0}$. Montrez que la famille $\big(a, f(a), f^2(a)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^3$. Le *commutant* de f est l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec f ; nous le notons $\operatorname{Comm}(f)$. Montrez que $\operatorname{Comm}(f) = \operatorname{Vect}(\mathrm{id}, f, f^2)$.

Q4 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. On munit $E \times F$ d'une addition notée $+$, définie par $(u, v) + (w, x) = (u + w, v + x)$, et on fait opérer $\mathbb{K}$ sur $E \times F$ par $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$. Vérifiez que $E \times F$ possède ainsi une structure de $\mathbb{K}$-e.v (dite *structure de* $\mathbb{K}$*-e.v. produit*).

Q5 Notons E le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (3, -1, 4)$, $F = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$, et $G = \big\{(x, y, z) \in E \mid x + 2y - z = 0\big\}$. Prouvez que $E = F \oplus G$; donnez l'expression analytique, dans la base canonique $\mathbb{R}^3$, de la projection p de base F et de direction G, puis celle de la symétrie s de base F et de direction G.

Q6 Notons E l'ensemble des fonctions de la forme $x > 1 \mapsto \dfrac{P(x)}{x^3 - 1}$, où P est une fonction polynôme de degré deux au plus. (i) montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v. et que $f : x > 1 \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$, $g : x > 1 \mapsto \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$ et $h : x > 1 \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ forment une base $\mathcal{B}$ de E. (ii) déterminez les coordonnées de $k : x > 1 \mapsto \dfrac{1}{x^3 - 1}$ dans $\mathcal{B}$.

Espaces de dimension finie

Q7 Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F un s.e.v. de E, G et H deux supplémentaires de F. Donnez une preuve *très brève* de l'assertion suivante : G et H sont isomorphes.

Q8 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E)$? En déduire que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$, distinct du polynôme nul et tel que $P(f) = 0$.

Q9 Notons $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto X(X + 1)P' - 2\alpha XP$. Déterminez α pour que φ soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Montrez que, pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, il existe un polynôme P_k non nul tel que $\varphi(P_k) = kP_k$. Montrez que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Quelle est la trace de φ ?

Q10 Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de réels, vérifiant $x_i < x_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n - 1]\!]$. À toute famille $\mathcal{V} = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de réels, associons $\varphi(\mathcal{V})$, fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même, définie comme suit : $f(x_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$; la restriction de f à chacun des intervalles $]-\infty, x_1]$ et $[x_n, +\infty[$ est constante ; pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine. (i) faites un dessin, pour le cas $n = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = 1$. (ii) montrez que φ est un homomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, chacun de ces ensembles étant muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v. (iii) φ est-il injectif ?

Q11 Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-e.v. E vérifie $(f - ai) \circ (f - bi) = 0$, où i désigne l'endomorphisme identique de E, et a, b sont deux scalaires distincts. (i) montrez que $p = \dfrac{f - ai}{b - a}$ et $q = \dfrac{f - bi}{a - b}$ sont des projecteurs. (ii) exprimez f comme combinaison linéaire de p et q. (iii) explicitez f^n pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de p et q. (iv) supposons $ab \neq 0$; montrez que f est un automorphisme, explicitez f^{-1} en fonction de p et q. (v) supposons E de dimension finie ; montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est *très simple*.

Q12 Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$. Prouvez que la famille $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$. *Indication* : vous pouvez vous ramener à des fonctions polynômes.

Q13 Pour $a \in \mathbb{R}$, notons $f_a : x \mapsto |x - a|$. Soit $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Prouvez que la famille $(f_{a_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$. *Indication* : faites appel à un argument de dérivabilité.

Q14 Dans le $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}^3$, considérons $\vec{u} = (1 + i, 1 - i, i)$, $\vec{v} = (2, i, 1 - i)$ et $\vec{w} = (2i, 2 - 3i, 1)$. Prouvez que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{C}^3$; calculez les coordonnées de $(3 + 4i, 1 - 2i, 5 + i)$ dans cette base.

$\boxed{\text{Q15}}$ E désigne l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de réels, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v. Notons Φ la fonction qui, à $u \in E$, associe la suite $\Phi(u)$ définie par $\big(\Phi(u)\big)_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (i) montrez que Φ est un endomorphisme de E. (ii) montrez que Φ est injectif. (iii) montrez que Φ est surjectif : pour ce faire, fixant $v \in E$, vous écrirez les conditions que doivent nécessairement satisfaire u_0, u_1, u_2 pour que $v = \Phi(u)$; vous chercherez alors une formule générale, dont vous établirez ensuite la validité pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un mini-problème

► Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et f un endomorphisme de E. id désigne l'endomorphisme identique de E. Notons $f^2 = f \circ f$; nous supposons dans la suite que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id} = 0$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Prouvez que $f - \mathrm{id}$ et $2\,\mathrm{id} - f$ sont des projecteurs.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$; donnez une expression de f^n en fonction de f et id.

$\boxed{\text{Q3}}$ La formule obtenue est-elle encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Espaces de dimension finie

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient a, b, c, d quatre réels. Notons $g_{a,b,c,d}$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x) + cx\cos(x) + dx\sin(x))e^{-x}$, et E l'ensemble des $g_{a,b,c,d}$ où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$. (i) montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v. (ii) notons $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)e^{-x}$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)e^{-x}$, $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto x\cos(x)e^{-x}$ et $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto x\sin(x)e^{-x}$; montrez que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E. (iii) montrez que $D : f \mapsto f'$ est un automorphisme de E ; donnez l'expression analytique de D^{-1} dans la base $\mathcal{B}$. (Source : Bac C Strasbourg 1982)

L'algèbre des endomorphismes

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Pour f et g dans $L(E)$, on définit $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. C'est donc une loi de composition sur $L(E)$; est-elle associative ? Vérifiez l'identité de Jacobi : $\big[f, [g, h]\big] + \big[g, [h, f]\big] + \big[h, [f, g]\big] = 0$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On note T_f l'application qui, à $g \in L(E)$, associe $T_f(g) = f \circ g - g \circ f$. (i) montrez que T_f est un endomorphisme de $L(E)$. (ii) on note ${T_f}^p$ le p-ième itéré de T_f ; prouvez que ${T_f}^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} g f^k$. (iii) on suppose qu'il existe un indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$; montrez qu'il existe un indice $p \in \mathbb{N}$ tel que $(T_f)^p = 0$.