Quelques questions autour du rang

► E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. f et g sont deux endomorphismes de E.

Q1 Prouvez que $\mathrm{rg}(f \circ g)$ est majoré par $\mathrm{rg}(f)$.

► $\mathrm{im}(f \circ g) \subset \mathrm{im}(f)$, donc $\mathrm{rg}(f \circ g) = \dim\big(\mathrm{im}(f \circ g)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{im}(f)\big) = \mathrm{rg}(f)$. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(f)}$.

Q2 Prouvez que $\mathrm{rg}(f \circ g)$ est majoré par $\mathrm{rg}(g)$. Indication : considérez une base de $\mathrm{im}(g)$, et son image par f.

► $g(E) \subset E$; $f \circ g$ est donc une application linéaire de $g(E)$ dans E ; par suite, $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \dim\big(g(E)\big)$, soit $\boxed{\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(g)}$.

Q3 Donnez un exemple où $\mathrm{rg}(f \circ g) = \max\big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big)$, puis un exemple où $\mathrm{rg}(f \circ g) < \max\big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big)$.

► Pour le premier cas, prendre $f = g = \mathrm{id}_E$. Pour l'autre cas, prendre $\dim(E) = 2p$, f et g tels que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) = p$ et $f \circ g = \mathbf{0}$.

Q4 Comparez $\mathrm{im}(f + g)$ et $\mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g)$. Exhibez un exemple où l'inclusion que vous avez prouvée est stricte.

► Pour tout $x \in E$, nous aurons $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ donc $\mathrm{im}(f + g) \subset \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g)$; donc $\boxed{\mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)}$.

Q5 En déduire une première inégalité reliant $\mathrm{rg}(f + g)$, $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.

► Pour $x \in E$, nous aurons $f(x) = (f + g)(x) + g(-x)$ donc $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(f + g) + \mathrm{im}(g)$. Nous en déduisons $\dim\big(\mathrm{im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{im}(f + g)\big) + \dim\big(\mathrm{im}(g)\big)$ soit finalement $\boxed{\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f + g) + \mathrm{rg}(g)}$.

Q6 En déduire un majorant de $\big|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\big|$. *Indication* : pensez à la façon dont la deuxième inégalité triangulaire se déduit de la première.

► De la relation $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f + g) + \mathrm{rg}(g)$ nous déduisons $\big|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\big| \leqslant \mathrm{rg}(f + g)$.

Q7 Soient G et H deux s.e.v. de E ; montrez que $f(G + H) \subset f(G) + f(H)$.

► Soit $y \in f(G + H)$; il existe u et v tels que $f(u) \in G$ et $f(v) \in H$. De $f(u + v) = f(u) + f(v)$, nous déduisons $y = f(u + v) = f(u) + f(v) \in f(G) + f(H)$. Ainsi $\boxed{f(G + H) \subset f(G) + f(H)}$.

Q8 Établissez alors l'inégalité $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g)$. *Indication* : notez $G = \mathrm{im}(g)$, et H un supplémentaire de G.

► Soient $G = \mathrm{im}(g)$ et H un supplémentaire de $\mathrm{im}(g)$. Nous aurons $E = G \oplus H$ et $\dim(H) = n - \mathrm{rg}(g)$; mais $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(f(E)\big) = \dim\big(G \oplus H\big) \leqslant \dim\big(f(G)\big) + \dim\big(f(H)\big)$; ceci, car $f(G \oplus H) \subset f(G) + f(H)$.

Or $f(G) = f\big(\mathrm{im}(g)\big) = f\big(g(E)\big) = (f \circ g)(E) = \mathrm{im}(f \circ g)$; par ailleurs, $\dim\big(f(H)\big) \leqslant \dim(H)$. Donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) + n - \mathrm{rg}(g)$, soit $\boxed{\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g)}$.

Q9 En déduire la relation $\dim\big(\ker(f \circ g)\big) \leqslant \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\ker(g)\big)$.

► Avec le théorème du rang, la relation précédente devient $n - \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant n - \mathrm{rg}(f) + n - \mathrm{rg}(g)$, soit finalement $\boxed{\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n + \mathrm{rg}(f \circ g)}$.