Quelques questions autour du rang

▶ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. f et g sont deux endomorphismes de E.

Q1 Prouvez que $\mathrm{rg}(f\circ g)$ est majoré par $\mathrm{rg}(f)$.

▶ $\mathrm{im}(f\circ g)\subset \mathrm{im}(f)$, donc $\mathrm{rg}(f\circ g)=\dim\big(\mathrm{im}(f\circ g)\big)\leqslant \dim\big(\mathrm{im}(f)\big)=\mathrm{rg}(f)$. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant \mathrm{rg}(f)}$.

Q2 Prouvez que $\mathrm{rg}(f\circ g)$ est majoré par $\mathrm{rg}(g)$. Indication : considérez une base de $\mathrm{im}(g)$, et son image par f.

▶ $g(E)\subset E$; $f\circ g$ est donc une application linéaire de $g(E)$ dans E ; par suite, $\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant \dim\big(g(E)\big)$, soit $\boxed{\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant \mathrm{rg}(g)}$.

Q3 Donnez un exemple où $\mathrm{rg}(f\circ g)=\max\big(\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)\big)$, puis un exemple où $\mathrm{rg}(f\circ g)<\max\big(\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)\big)$.

▶ Pour le premier cas, prendre $f=g=\mathrm{id}_E$. Pour l'autre cas, prendre $\dim(E)=2p$, f et g tels que $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(g)=p$ et $f\circ g=\mathbf{0}$.

Q4 Comparez $\mathrm{im}(f+g)$ et $\mathrm{im}(f)+\mathrm{im}(g)$. Exhibez un exemple où l'inclusion que vous avez prouvée est stricte.

▶ Pour tout $x\in E$, nous aurons $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ donc $\mathrm{im}(f+g)\subset \mathrm{im}(f)+\mathrm{im}(g)$; donc $\boxed{\mathrm{rg}(f+g)\leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)}$.

Q5 En déduire une première inégalité reliant $\mathrm{rg}(f+g)$, $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.

▶ Pour $x\in E$, nous aurons $f(x)=(f+g)(x)+g(-x)$ donc $\mathrm{im}(f)\subset \mathrm{im}(f+g)+\mathrm{im}(g)$. Nous en déduisons $\dim\big(\mathrm{im}(f)\big)\leqslant \dim\big(\mathrm{im}(f+g)\big)+\dim\big(\mathrm{im}(g)\big)$ soit finalement $\boxed{\mathrm{rg}(f)\leqslant \mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(g)}$.

Q6 En déduire un majorant de $\big|\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)\big|$. *Indication* : pensez à la façon dont la deuxième inégalité triangulaire se déduit de la première.

▶ De la relation $\mathrm{rg}(f)\leqslant \mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(g)$ nous déduisons $\big|\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)\big|\leqslant \mathrm{rg}(f+g)$.

Q7 Soient G et H deux s.e.v. de E ; montrez que $f(G+H)\subset f(G)+f(H)$.

▶ Soit $y\in f(G+H)$; il existe u et v tels que $f(u)\in G$ et $f(v)\in H$. De $f(u+v)=f(u)+f(v)$, nous déduisons $y=f(u+v)=f(u)+f(v)\in f(G)+f(H)$. Ainsi $\boxed{f(G+H)\subset f(G)+f(H)}$.

Q8 Établissez alors l'inégalité $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)-n\leqslant \mathrm{rg}(f\circ g)$. *Indication* : notez $G=\mathrm{im}(g)$, et H un supplémentaire de G.

▶ Soient $G=\mathrm{im}(g)$ et H un supplémentaire de $\mathrm{im}(g)$. Nous aurons $E=G\oplus H$ et $\dim(H)=n-\mathrm{rg}(g)$; mais $\mathrm{rg}(f)=\dim\big(f(E)\big)=\dim\big(G\oplus H\big)\leqslant \dim\big(f(G)\big)+\dim\big(f(H)\big)$; ceci, car $f(G\oplus H)\subset f(G)+f(H)$.

Or $f(G)=f\big(\mathrm{im}(g)\big)=f\big(g(E)\big)=(f\circ g)(E)=\mathrm{im}(f\circ g)$; par ailleurs, $\dim\big(f(H)\big)\leqslant \dim(H)$. Donc $\mathrm{rg}(f)\leqslant \mathrm{rg}(f\circ g)+n-\mathrm{rg}(g)$, soit $\boxed{\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)-n\leqslant \mathrm{rg}(f\circ g)}$.

Q9 En déduire la relation $\dim\big(\ker(f\circ g)\big)\leqslant \dim\big(\ker(f)\big)+\dim\big(\ker(g)\big)$.

▶ Avec le théorème du rang, la relation précédente devient $n-\mathrm{rg}(g\circ f)\leqslant n-\mathrm{rg}(f)+n-\mathrm{rg}(g)$, soit finalement $\boxed{\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leqslant n+\mathrm{rg}(f\circ g)}$.