$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Exercices : algèbre linéaire (5b)}}$

► Les exercices de cette feuille portent sur les notions suivantes : dimension et/ou base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace ; rang d'une famille finie de vecteurs ; rang d'une application linéaire.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comparez les rangs de f et de λf.

► Si $\lambda \neq 0$, alors f et λf ont même rang ; sinon, $\lambda f = \mathbf{0}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quels sont les endomorphismes f de $\mathbb{K}^n$ qui vérifient $\operatorname{rg}(2f) = 2\operatorname{rg}(f)$?

► Notons que $2f$ a même rang que f ; notons k la valeur commune des deux rangs. Alors $2\operatorname{rg}(f) = 2k$; donc $\operatorname{rg}(2f) = 2\operatorname{rg}(f)$ ssi f est de rang nul.

$\boxed{\text{Q3}}$ **Commutant d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 3. $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 \neq \mathbf{0}$ et $f^3 = \mathbf{0}$. Le *commutant* de f est l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec f. Montrez que ce commutant est $\operatorname{Vect}(\operatorname{id}, f, f^2)$.

► Il est clair que f commute avec id, f et f^2 ; donc f commute avec $a\operatorname{id} + bf + cf^2$. Réciproquement, si f commute avec $a\operatorname{id} + bf + cf^2$, alors, en composant par f^2, il vient $af^2 = \mathbf{0}$ donc $a = 0$. En répétant deux fois l'opération, nous obtenons $a = b = c = 0$ donc f commute avec id, f et f^2.

$\boxed{\text{Q4}}$ **Formule de Bernoulli et inverse d'un endomorphisme.**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. f est un endomorphisme de E tel que $f^n = \mathbf{0}$. Notons $g = \operatorname{id}_E + f + \cdots + f^{n-1}$. Calculez $g \circ (\operatorname{id}_E - f)$ et $(\operatorname{id}_E - f) \circ f)$. Que constatez-vous ?

► $g \circ (\operatorname{id}_E - f) = (\operatorname{id}_E + f + \cdots + f^{n-1}) \circ (\operatorname{id}_E - f) = \operatorname{id}_E$, car le dernier terme f^n s'élimine. De même, $(\operatorname{id}_E - f) \circ (\operatorname{id}_E + f + \cdots + f^{n-1}) = \operatorname{id}_E$. Donc g et $\operatorname{id}_E - f$ sont symétriques l'un de l'autre, et g est la bijection réciproque de $\operatorname{id}_E - f$.

$\boxed{\text{Q5}}$ **Avec un projecteur.**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^3 + f = \mathbf{0}$. Notons $p = \operatorname{id}_E + f^2$. Montrez que p est un projecteur. En déduire $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + \operatorname{id}_E) = E$.

► $\operatorname{id}_E + f^2 = p = p^2 = (\operatorname{id}_E + f^2)^2 = \operatorname{id}_E + 2f^2 + f^4 = \operatorname{id}_E + f^2$, ceci car $f^4 = -f^2$.

► $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f^2(x) = \overrightarrow{0}$; mais $f^2(x) = -x$, donc $x = \overrightarrow{0}$; ainsi, $\ker(f) \cap \ker(f^2 + \operatorname{id}_E) = \{\overrightarrow{0}\}$.

► $x \in \operatorname{im}(p) \Rightarrow p(x) = x \Rightarrow x + f^2(x) = x \Rightarrow f^2(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f^3(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow -f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x \in \ker(f)$. Ainsi $\boxed{\operatorname{im}(p) \subset \ker(f)}$.

► $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x + f^2(x) = x + f\big(f(x)\big) = x + f(\overrightarrow{0}) = x + \overrightarrow{0} \Rightarrow p(x) = x \Rightarrow x \in \operatorname{im}(p)$. Ainsi $\ker(f) \subset \operatorname{im}(p)$. Concluons : $\boxed{\ker(f) = \operatorname{im}(p)}$, par double inclusion.

$\boxed{\text{Q6}}$ **Décomposition d'un $\mathbb{K}$-e.v. en somme directe de deux sous-espaces.**
E est le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons $F = \big\{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\big\}$. Notons $G = \big\{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\big\}$. Montrez que F et G sont deux s.e.v. de E. Montrez que F et G sont supplémentaires l'un de l'autre. Donnez l'expression des projections associées à cette décomposition de E.

► F et G sont visiblement des s.e.v. de E.

► Soit $f \in F \cap G$: alors f est une fonction affine, donc de la forme $x \mapsto ax + b$. Mais $f(0) = f'(0) = 0$, donc $a = b = 0$. Finalement, f est la fonction nulle, et donc F et G sont en somme directe.

► Soit $f \in E$; notons $a = f'(0)$ et $b = f(0)$. La fonction $g :\ x \mapsto f(x) - ax - b$ appartient à F ; la fonction h : $x \mapsto ax + b$ appartient à G ; et la somme ainsi définie est unique. Donc $E = F \oplus G$.

$\boxed{\text{Q7}}$ **Produit de deux $\mathbb{K}$-e.v.**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Munissons $E \times F$ d'une addition notée $+$, définie par $(u, v) + (w, x) = (u + w, v + x)$. Nous faisons opérer $\mathbb{K}$ sur $E \times F$ par $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$. Vérifiez que $E \times F$ possède ainsi une structure de $\mathbb{K}$-e.v (dite

- Nous vérifions que $E\times F$ est stable pour les deux opérations ; puis, que l'addition est associative, commutativen possède le neutre $(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0})$, et que chaque élément (u,v) de $E\times F$ possède un opposé $(-u,-v)$. Ensuite, nous vérifions les quatré propriétés supplémentaires d'un espace vectoriel.

$\boxed{\text{Q8}}$ **Suites convergentes**. E est le $\mathbb{R}$-e.v. des suites de réels. L'ensemble F des suites convergentes est-il un s.e.v. de E ?

- Oui : la suite nulle est bornée, donc $F \neq \{\mathbf{0}\}$. Si (g_n) et (h_n) sont deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = b$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} (g+\lambda h)_n = \lim\limits_{n\to\infty} g_n + \lambda \lim\limits_{n\to\infty} h_n = a+\lambda b$. La suite de terme général $g_n + \lambda h_n$ converge vers $a+\lambda b$. Donc l'ensemble F des suites convergentes est un s.e.v. de E.

$\boxed{\text{Q9}}$ **Suites bornées**.
E est le $\mathbb{R}$-e.v. des suites de réels. L'ensemble F des suites bornées est-il un s.e.v. de E ?

- Oui : la suite nulle est bornée, donc $F \neq \{\mathbf{0}\}$. Si g et h sont deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors (g_n) et (h_n) sont bornées, respectivement par a et b. Majorons le terme général $g_n + \lambda h_n$: nous aurons $\left|g_n + \lambda h_n\right| \leqslant |g_n| + |\lambda| \times |h_n| \leqslant a + |\lambda| b$; la suite considérée est donc bornée. Ainsi, l'ensemble F des suites bornées est un s.e.v. de E.

$\boxed{\text{Q10}}$ $\ker(\varphi)$ **et** $\operatorname{im}(\varphi)$ **ne sont pas nécessairement isomorphes**.
$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Définissons φ comme suit : $\varphi(f) = f''$. Montrez que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Déterminez $\ker(\varphi)$ et $\operatorname{im}(\varphi)$.

- Notons déjà que φ est une fonction de E dans E, et que $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Soient g et h deux éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(g+\lambda h) = (g+\lambda h)'' = g'' + \lambda h'' = \varphi(g) + \lambda\varphi(h)$. Donc φ est linéaire.
- $g \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow g'' = \mathbf{0} \Leftrightarrow g(0) = g'(0) = 0$. Donc $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonction de la forme $x \mapsto ax+b$, où a et b sont des réels quelconques.
- Soit $g \in E$; alors il existe $k \in E$ telle que $k'' = g$. Donc tout élément g de E possède au moins un antécédent k par φ. Ainsi $\operatorname{im}(f) = E$.

$\boxed{\text{Q11}}$ **Deux endomorphismes qui commutent**.
E est un $\mathbb{K}$-e.v. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme tel qu'il existe un seul $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f\circ g = \operatorname{id}_E$. Définissons $g' = g\circ f - \operatorname{id}_E + g$. Simplifiez $f\circ g'$. Comparez alors g et g'. En déduire que f est bijective.

- $g' = g\circ f - \operatorname{id}_E + g \Rightarrow f\circ g' = f\circ g\circ f - f + f\circ g \Rightarrow f\circ g' = f - f + f\circ g \Rightarrow f\circ g' = f\circ g$. Donc $\boxed{f\circ g' = f\circ g}$.
- L'unicité de g implique $g' = g$.
- Nous avons $f\circ g = \operatorname{id}_E$ et $g\circ f = \operatorname{id}_E$: donc f et g sont inverses l'un de l'autre.
