

- Les exercices de cette feuille portent sur les notions suivantes : dimension et/ou base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace ; rang d'une famille finie de vecteurs ; rang d'une application linéaire.

Q1 Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comparez les rangs de f et de λf .

- Si $\lambda \neq 0$, alors f et λf ont même rang ; sinon, $\lambda f = \mathbf{0}$.

Q2 Quels sont les endomorphismes f de \mathbb{K}^n qui vérifient $\text{rg}(2f) = 2 \text{rg}(f)$?

- Notons que $2f$ a même rang que f ; notons k la valeur commune des deux rangs. Alors $2 \text{rg}(f) = 2k$; donc $\text{rg}(2f) = 2 \text{rg}(f)$ ssi f est de rang nul.

Q3 **Commutant d'un endomorphisme de \mathbb{K}^3 .**

E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension 3. $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 \neq \mathbf{0}$ et $f^3 = \mathbf{0}$. Le *commutant* de f est l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec f . Montrez que ce commutant est $\text{Vect}(\text{id}, f, f^2)$.

- Il est clair que f commute avec id , f et f^2 ; donc f commute avec $a \text{id} + bf + cf^2$. Réciproquement, si f commute avec $a \text{id} + bf + cf^2$, alors, en composant par f^2 , il vient $af^2 = \mathbf{0}$ donc $a = 0$. En répétant deux fois l'opération, nous obtenons $a = b = c = 0$ donc f commute avec id , f et f^2 .

Q4 **Formule de Bernoulli et inverse d'un endomorphisme.**

E est un \mathbb{K} -e.v. f est un endomorphisme de E tel que $f^n = \mathbf{0}$. Notons $g = \text{id}_E + f + \dots + f^{n-1}$. Calculez $g \circ (\text{id}_E - f)$ et $(\text{id}_E - f) \circ g$. Que constatez-vous ?

- $g \circ (\text{id}_E - f) = (\text{id}_E + f + \dots + f^{n-1}) \circ (\text{id}_E - f) = \text{id}_E$, car le dernier terme f^n s'élimine. De même, $(\text{id}_E - f) \circ g = (\text{id}_E + f + \dots + f^{n-1}) = \text{id}_E$. Donc g et $\text{id}_E - f$ sont symétriques l'un de l'autre, et g est la bijection réciproque de $\text{id}_E - f$.

Q5 **Avec un projecteur.**

E est un \mathbb{K} -e.v. $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^3 + f = \mathbf{0}$. Notons $p = \text{id}_E + f^2$. Montrez que p est un projecteur. En déduire $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + \text{id}_E) = E$.

- $\text{id}_E + f^2 = p = p^2 = (\text{id}_E + f^2)^2 = \text{id}_E + 2f^2 + f^4 = \text{id}_E + f^2$, ceci car $f^4 = -f^2$.
- $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = \vec{0} \Rightarrow f^2(x) = \vec{0}$; mais $f^2(x) = -x$, donc $x = \vec{0}$; ainsi, $\ker(f) \cap \ker(f^2 + \text{id}_E) = \{\vec{0}\}$.
- $x \in \text{im}(p) \Rightarrow p(x) = x \Rightarrow x + f^2(x) = x \Rightarrow f^2(x) = \vec{0} \Rightarrow f^3(x) = \vec{0} \Rightarrow -f(x) = \vec{0} \Rightarrow f(x) = \vec{0} \Rightarrow x \in \ker(f)$. Ainsi $\boxed{\text{im}(p) \subset \ker(f)}$.
- $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = \vec{0} \Rightarrow x + f^2(x) = x + f(f(x)) = x + f(\vec{0}) = x + \vec{0} \Rightarrow p(x) = x \Rightarrow x \in \text{im}(p)$. Ainsi $\ker(f) \subset \text{im}(p)$. Concluons : $\boxed{\ker(f) = \text{im}(p)}$, par double inclusion.

Q6 **Décomposition d'un \mathbb{K} -e.v. en somme directe de deux sous-espaces.**

E est le \mathbb{R} -e.v. des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Notons $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Notons $G = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrez que F et G sont deux s.e.v. de E . Montrez que F et G sont supplémentaires l'un de l'autre. Donnez l'expression des projections associées à cette décomposition de E .

- F et G sont visiblement des s.e.v. de E .
- Soit $f \in F \cap G$: alors f est une fonction affine, donc de la forme $x \mapsto ax + b$. Mais $f(0) = f'(0) = 0$, donc $a = b = 0$. Finalement, f est la fonction nulle, et donc F et G sont en somme directe.
- Soit $f \in E$; notons $a = f'(0)$ et $b = f(0)$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - ax - b$ appartient à F ; la fonction $h : x \mapsto ax + b$ appartient à G ; et la somme ainsi définie est unique. Donc $E = F \oplus G$.

Q7 **Produit de deux \mathbb{K} -e.v.**

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. Munissons $E \times F$ d'une addition notée $+$, définie par $(u, v) + (w, x) = (u + w, v + x)$. Nous faisons opérer \mathbb{K} sur $E \times F$ par $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$. Vérifiez que $E \times F$ possède ainsi une structure de \mathbb{K} -e.v (dite

- Nous vérifions que $E \times F$ est stable pour les deux opérations ; puis, que l'addition est associative, commutative, possède le neutre $(\vec{0}, \vec{0})$, et que chaque élément (u, v) de $E \times F$ possède un opposé $(-u, -v)$. Ensuite, nous vérifions les quatre propriétés supplémentaires d'un espace vectoriel.

Q8 Suites convergentes. E est le \mathbb{R} -e.v. des suites de réels. L'ensemble F des suites convergentes est-il un s.e.v. de E ?

- Oui : la suite nulle est bornée, donc $F \neq \{\mathbf{0}\}$. Si (g_n) et (h_n) sont deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = b$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (g + \lambda h)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = a + \lambda b$. La suite de terme général $g_n + \lambda h_n$ converge vers $a + \lambda b$. Donc l'ensemble F des suites convergentes est un s.e.v. de E .

Q9 Suites bornées.

E est le \mathbb{R} -e.v. des suites de réels. L'ensemble F des suites bornées est-il un s.e.v. de E ?

- Oui : la suite nulle est bornée, donc $F \neq \{\mathbf{0}\}$. Si g et h sont deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors (g_n) et (h_n) sont bornées, respectivement par a et b . Majorons le terme général $g_n + \lambda h_n$: nous aurons $|g_n + \lambda h_n| \leq |g_n| + |\lambda| \times |h_n| \leq a + |\lambda|b$; la suite considérée est donc bornée. Ainsi, l'ensemble F des suites bornées est un s.e.v. de E .

Q10 $\ker(\varphi)$ et $\text{im}(\varphi)$ ne sont pas nécessairement isomorphes.

$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Définissons φ comme suit : $\varphi(f) = f''$. Montrez que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Déterminez $\ker(\varphi)$ et $\text{im}(\varphi)$.

- Notons déjà que φ est une fonction de E dans E , et que $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Soient g et h deux éléments de E , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(g + \lambda h) = (g + \lambda h)'' = g'' + \lambda h'' = \varphi(g) + \lambda \varphi(h)$. Donc φ est linéaire.
- $g \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow g'' = \mathbf{0} \Leftrightarrow g(0) = g'(0) = 0$. Donc $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonction de la forme $x \mapsto ax + b$, où a et b sont des réels quelconques.
- Soit $g \in E$; alors il existe $k \in E$ telle que $k'' = g$. Donc tout élément g de E possède au moins un antécédent k par φ . Ainsi $\text{im}(\varphi) = E$.

Q11 Deux endomorphismes qui commutent.

E est un \mathbb{K} -e.v. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme tel qu'il existe un seul $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = \text{id}_E$. Définissons $g' = g \circ f - \text{id}_E + g$. Simplifiez $f \circ g'$. Comparez alors g et g' . En déduire que f est bijective.

- $g' = g \circ f - \text{id}_E + g \Rightarrow f \circ g' = f \circ g \circ f - f + f \circ g \Rightarrow f \circ g' = f - f + f \circ g \Rightarrow f \circ g' = f \circ g$. Donc $f \circ g' = f \circ g$.
- L'unicité de g implique $g' = g$.
- Nous avons $f \circ g = \text{id}_E$ et $g \circ f = \text{id}_E$: donc f et g sont inverses l'un de l'autre.