Sup PCSI2 — Exercices : algèbre linéaire (5a)

► Les exercices de cette feuille portent sur les notions suivantes : dimension et/ou base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace ; rang d'une famille finie de vecteurs ; rang d'une application linéaire.

Q1 $\vec{u} = (1, 1, 2)$ et $\vec{v} = (-1, 2, -3)$. Déterminez $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une famille libre. Notez que vous n'avez que l'embarras du choix !

► Le vecteur $(0, 3, 17)$ convient parfaitement !

Q2 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{K}^3$ qui forment une famille libre. Montrez que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u})$ est elle ausi libre.

► Nous avons l'égalité $a(\vec{u} + \vec{v}) + b(\vec{v} + \vec{w}) + c(\vec{w} + \vec{u}) = \overrightarrow{0}$, soit $(a + c)\vec{u} + (b + a)\vec{v} + (c + b)\vec{w} = \overrightarrow{0}$. Alors $a + c = b + a = c + b = 0$, donc $a = b = c = 0$: Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Q3 Notons $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$. Montrez que G est un s.e.v. de $\mathbb{K}^3$. Quelle est sa dimension ? Exhibez une base de G.

► G n'est pas vide ; G est stable pour les deux opérations. G est un plan d'équation $x+y+2z = 0$; nous pouvons aussi le voir comme l'orthogonal du vecteur $(1, 1, 2)$. Une base de G est constituée des vecteurs $(1, 1, -2)$ et $(1, -1, 0)$.

Q4 Notons $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$. Montrez que H est un s.e.v. de $\mathbb{K}^3$. Quelle est sa dimension ? Exhibez une base de H.

► H n'est pas vide ; H est stable pour les deux opérations. H est une droite, dirigée par le vecteur $(-1, 1, 2)$.

Q5 Notons $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$ et $w = (0, 1, -1)$. Montrez que $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{w})$ sont supplémentaires, dans $\mathbb{K}^3$.

► $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, donc de dimension 2 ; $\mathrm{Vect}(\vec{w})$ est libre, donc de dimension 1. $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \mathbf{0}$ implique $a = b = c = 0$, donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

Q6 Quel est le rang de la famille de fonctions $p : x \mapsto \sin(x + 1)$, $q : x \mapsto \sin(x + 2)$ et $r : x \mapsto \sin(x + 3)$?

► $p(x) = \sin(x + 1) = \sin(x)\cos(1) + \cos(x)\sin(1)$; de même, $q(x) = \sin(x + 2) = \sin(x)\cos(2) + \cos(x)\sin(2)$ et $r(x) = \sin(x+3) = \sin(x)\cos(3)+\cos(x)\sin(3)$. Donc les fonctions p, q et r sont des combinaisons linéaires des fonction $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto 1$; par suite, $\mathrm{rg}(p, q, r) \leqslant 2$. les fonctions sin et cos sont indépendantes, et $\sin(1)$ et $\cos(1)$ sont des réels non nuls ; donc $\mathrm{rg}(p, q, r) = 2$.

Q7 La famille (i, j, k) est la base canonique de $\mathbb{K}^3$. La famille $u = i+j+k$, $v = i+j$, $w = 2i+2j-k$ est-elle libre ?

► Non : la combinaison linéaire $au + bv + cw = \mathbf{0}$ revient à $a(i + j + k) + b(i + j) + c(2i + 2j - k) = \mathbf{0}$, soit $(a + b + 2c) = 0$ et $a - c = 0$. Donc $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ se réduit à $\mathrm{Vect}(1, -3, 1)$.
