Sup PCSI2 — Exercices : algèbre linéaire (4b)

- L'exercice de cette feuille porte sur les notions suivantes : famille libre, famille génératrice, base, dimension, rang, sous-espace engendré par une partie.

Un mini-problème

- Dans $\mathbb{R}^4$, définissons $a = (3, 2, 1, 4)$, $b = (1, 1, 1, 3)$, $c = (4, 2, 0, 2)$, $d = (-1, 0, 1, 2)$ et $e = (0, 3, 2, 1)$.
- Notons $\mathcal{U} = (a, b, c, d, e)$.

Q1 Montrez que la famille (a, b, c) est liée.

- $-2a + 2b + c = \mathbf{0}$.

Q2 Montrez que la famille (a, c, d) est liée.

- $d = a + c$.

Q3 Quel est le rang de $\mathcal{U}$?

- La famille (a, c) engendre b et d ; elle est donc de rang 2 au moins.

Q4 La famille $\mathcal{U}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

- La famille $\mathcal{U}$ est de rang 3, mais l'espace ambiant est $\mathbb{R}^4$; donc $\mathcal{U}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$.
- Notons $F = \mathrm{Vect}(a, b, c)$ et $G = \mathrm{Vect}(d, e)$.

Q5 Déterminez une base de F.

- Une base de F est (a, b), donc $\mathrm{Vect}(a, b)$ est de rang 2.

Q6 Déterminez une base de G.

- (d, e) est visiblement une base de G ; et donc G est de rang 2.

Q7 $\mathcal{U}$ engendre $F + G$; mais est-ce une base de $F + G$?

- La famille $\mathcal{U}$ compte cinq vecteurs, mais est dans $\mathbb{R}^4$: elle est donc liée.

Q8 Quelle est la dimension de $F \cap G$? Déterminez une base de $F \cap G$.

-