► Les exercices de cette feuille portent sur les notions de famille libre, famille génératrice, base, dimension.

Dépendance linéaire

Q1 Notons $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ et $\vec{w} = (5, 1, 4)$. Montrez que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre. Soit $\vec{a} = (1, -2, 1)$; donnez les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base canonique.

► Nous vérifions facilement que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ mène à un système échelonné, et donc $\mathcal{B}$ est libre. Enfin, $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$.

Q2 $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0 \text{ et } x - 3y + 3z = 0\}$. Donnez une base du s.e.v. F.

► Les trois équations se réduisent à $x + y + z = 0$ et $z = 2y$, si bien que F est une droite vectorielle, dirigée par le vecteur $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Fin de l'histoire !

Q3 Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, les fonctions $f : x \mapsto \sin(2x)$, $g : x \mapsto \cos(2x)$ et $h : x \mapsto \sin^2(x)$ sont-elles indépendantes ? Même question avec les fonctions $p : x \mapsto \cos^2(x)$, $q : x \mapsto \cos(2x)$ et $r : x \mapsto \sin^2(x)$.

► f est impaire et non nulle ; g et h sont paires et indépendantes ; donc (f, g, h) est libre.

► $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ donc $q = p - r$: la famille (p, q, r) est liée. Un peu d'attention montre qu'elle est de rang 2 ; par exemple, le couple (p, q) est libre.

Q4 Les fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$, $g : x \mapsto \ln(2x)$ et $h : x \mapsto \ln(3x)$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$. La famille (f, g, h) est-elle libre ?

► Réponse négative : $\ln(2x) = \ln(x) + \ln(2)$ et $\ln(3x) = \ln(x) + \ln(3)$. Donc les fonctions f, g et h sont des combinaisons linéaires des fonctions $x > 0 \mapsto \ln(x)$ et $x > 0 \mapsto 1$. Ajoutons que ces deux fonctions sont indépendantes, donc $\mathrm{Vect}(g, h)$ est de rang 2.

Q5 Mêmes questions, avec $f : x \mapsto \ln(x)$, $g : x \mapsto \ln(2x)$ et $h : x \mapsto \ln(x^2)$.

► Nous pouvons écrire à nouveau $\ln(2x) = \ln(x) + \ln(2)$, mais aussi $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Le rang de $\mathrm{Vect}(f, g, h)$ est au plus égal à 2 ; $\mathrm{Vect}(f, g)$ est de rang 2 donc $\mathrm{Vect}(f, g, h)$ est de rang 2.

Q6 **Une famille de trois vecteurs, avec un paramètre.**
Dans $\mathbb{K}^3$, considérons $\vec{u} = (m, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, m, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, m)$. Notons $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Pour quelle(s) valeur(s) de m le système $\mathcal{B}$ est-il libre ? Calculez les coordonnées de $(2, -3, -1)$ dans cette base. Pour chacune des valeurs de m telles que $\mathcal{B}$ soit liée, donnez le rang de la famille $\mathcal{B}$ ainsi qu'une famille génératrice minimale.

► Pour $m = 1$, les trois vecteurs sont égaux à $(1, 1, 1)$ donc la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ engendre le s.e.v. $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.

► Pour $m = -2$, les trois vecteurs sont dans le plan d'équation $x + y + z = \vec{0}$. Effectuons trois opérations élémentaires : $\mathcal{L}_1 \leftarrow \mathcal{L}_1 - m\mathcal{L}_2$, puis $\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_2$, puis $\mathcal{L}_1 \leftarrow \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3$: nous obtenons $\vec{w'} = (0, 1 - m, m - 1)$ et $\vec{u'} = (0, 2 - m - m^2, 0)$, qui forment une base de $\mathbb{K}^3$.

► Sinon, les trois vecteurs sont indépendants, et forment donc une base de $\mathbb{K}^3$.

Q7 **Une famille de trois fonctions.**
Notons $p : x \mapsto \arctan(x - 1)$, $q : x \mapsto \arctan(x)$ et $r : x \mapsto \arctan(x + 1)$. Montrez que la famille (p, q, r) est libre.

► Soient a, b et c trois réels ; alors $a\arctan(x - 1) + b\arctan(x) + c\arctan(x + 1) = 0$. Pour $x = 0$, il vient $a = c$. Pour $x = 1$, il vient $b\arctan(1) - c\arctan(2) = 0$; pour $x = -1$, il vient $b\arctan(1) + a\arctan(2) = 0$; Donc $a = c$, $b = c$ et $b = -a$; ceci implique $a = b = c = 0$. Donc $\boxed{\text{la famille } (p, q, r) \text{ est libre}}$.

Q8 **Inversion d'une famille libre.**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. Une base de E est $(e_1, \ldots, e_n)$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons $u_k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} e_j$.

Montrez que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

► Il suffit de noter que $e_1 = u_1$; puis, pour $k \in [\![2,n]\!]$, nous aurons $e_k = u_k - u_{k-1}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ **Une famille libre, puis une famille liée !**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. Une base de E est $(e_1, \ldots, e_n)$. La famille $\mathcal{F} = (e_1+e_2, e_2+e_3, \ldots, e_{n-1}+e_n, e_n+e_1)$ est-elle libre ? Même question pour la famille $\mathcal{G} = (e_1-e_2, e_2-e_3, \ldots, e_{n-1}-e_n, e_n-e_1)$.

► Nous convenons de noter $e_{n+1} = e_1$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k(e_k + e_{k+1}) = \overrightarrow{0}$. Alors :

$$\lambda_1 e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_3 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)e_{n-1} + (\lambda_n + \lambda_{n+1})e_n + \lambda_{n+1}e_{n+1} = \overrightarrow{0}$$

La résolution nous donne successivement $\lambda_1 = 0$; puis $\lambda_{k+1} = -\lambda_k = 0$ pour $k \in [\![2,n]\!]$. Finalement, les λ_k sont tous nuls : donc $\boxed{\text{la famille considérée est libre}}$.

► Cette fois, la famille est liée, puisque $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (e_k - e_{k+1}) = \overrightarrow{0}$. Mais observons que la famille $(e_1-e_2, \ldots, e_{n-1}-e_n)$ est libre : en effet $\sum\limits_{1 \leqslant k < n} \lambda_k(e_k - e_{k+1}) = \overrightarrow{0}$ devient $\lambda_1 e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)e_2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})e_n - \lambda_n e_n = \overrightarrow{0}$; nous avons donc successivement $\lambda_1 = 0$; puis $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$, donc $\lambda_2 = 0$; et ainsi de suite, jusqu'à $\lambda_n - \lambda_{n-1} = 0$, soit $\lambda_n = 0$. Donc $\boxed{\text{la famille } (e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n) \text{ est libre}}$.
