Sup PCSI2 — Exercices : algèbre linéaire (3)

► Les exercices de cette feuille portent sur les projecteurs.

Projecteurs et projections

► Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.

Q1 Existe-t-il des projecteurs p de E tels que $2p$ soit un projecteur ?

► Oui, mais le seul projecteur qui convient est le projecteur nul.

Q2 Existe-t-il des projecteurs p de E tels que $2\,\mathrm{id} - 3p$ soit un projecteur ?

► Non : p devrait vérifier $2i - 3p = (2i - 3p)^2 = 4i - 12p + 9p^2 = 4i - 3p \neq 2i - 3p$.

Q3 Soit p un projecteur non banal ; déterminez les couples (α, β) tels que $\alpha\,\mathrm{id} + \beta p$ soit un projecteur.

► $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

Q4 Soient p et q deux projecteurs de E. Montrez que $p \circ q = q$ ssi $\mathrm{im}(q) \subset \mathrm{im}(p)$; puis que $q \circ p = q$ ssi $\ker(p) \subset \ker(q)$.

► Supposons $p \circ q = q$. Soit $y \in \mathrm{im}(q)$: il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$. Alors $y = (p \circ q)(x) = p\big(q(x)\big)$ donc $y \in \mathrm{im}(p)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{im}(q) \subset \mathrm{im}(p)}$.

► Supposons maintenant $\mathrm{im}(q) \subset \mathrm{im}(p)$; soit $x \in E$; prouvons que $(p \circ q)(x) = q(x)$. Nous avons $q(x) \in \mathrm{im}(q)$, donc $q(x) \in \mathrm{im}(p)$, donc $q(x)$ est invariant par p, soit : $p\big(q(x)\big) = q(x)$ soit précisément $\boxed{(p \circ q)(x) = q(x)}$.

► Supposons $q \circ p = q$; soit $x \in \ker(p)$: alors $p(x) = \overrightarrow{0}$, donc $q\big(p(x)\big) = \overrightarrow{0}$, soit $(q \circ p)(x) = \overrightarrow{0}$, donc $q(x) = \overrightarrow{0}$, donc $x \in \ker(q)$. Ainsi, nous avons établi $\boxed{\ker(p) \subset \ker(q)}$.

► Supposons maintenant $\ker(p) \subset \ker(q)$. Soit $x \in E$, prouvons que $(q \circ p)(x) = q(x)$. Comme $(p \circ p)(x) = p(x)$, il vient $p(x) - x \in \ker(p)$, donc $p(x) - x \in \ker(q)$; ainsi $q\big(p(x) - x\big) = \overrightarrow{0}$, soit $(q \circ p)(x) = p(x)$. Ceci établit $\boxed{\ker(p) \subset \ker(q)}$.

Q5 Un projecteur p peut-il vérifier $\ker(p) = \mathrm{im}(p)$?

► Oui, si $\mathrm{im}(p) \subset \ker(p)$; dans ce cas, $p^2 = \mathbf{0}$.

Q6 Deux projecteurs p et q de E vérifient $p \circ q = \alpha q \circ p$. Soit $\alpha \notin \{0, 1\}$. Montrez que $p \circ q = q \circ p = 0$.

► $x \in \ker(p) \Rightarrow p(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha(q \circ p)(x) \Rightarrow (p \circ q)(x) = \overrightarrow{0}$.

► Soit $y \in \mathrm{im}(p)$. Alors : $p(y) = y \Rightarrow \alpha(q \circ p)(y) = \alpha q(y) \Rightarrow (p \circ q)(y) = \alpha q(y)$. Comme $\alpha \notin \{0,1\}$, nous avons nécessairement $q(y) = \overrightarrow{0}$ et à plus forte raison $(p \circ q)(y) = \overrightarrow{0}$.

► $E = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p) \Rightarrow p \circ q = \mathbf{0}$; comme $\alpha \neq 0$, nous aurons $q \circ p = \dfrac{1}{\alpha} p \circ q = \mathbf{0}$.

► Autre méthode, plus rapide : $p \circ q = p \circ q^2 = p \circ q \circ q = \alpha q \circ p \circ q = \alpha^2 q \circ p$ d'où $\alpha q \circ p = \alpha^2 q \circ p$; mais $\alpha^2 \neq \alpha$, donc $q \circ p = \mathbf{0}$ et par suite $p \circ q = \alpha q \circ p = \mathbf{0}$.

Q7 u et v sont deux endomorphismes de E. Prouvez que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ ssi u et v sont deux projecteurs ayant même noyau.

► Supposons $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$. Alors $u = u \circ u = (u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u)$ et de même $v \circ v = v$; donc u et v sont des projecteurs. Soit $x \in \ker(u)$: alors $u(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow v(x) = (v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big) = v(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$; donc $\ker(u) \subset \ker(v)$. Par raison de symétrie, $\ker(v) \subset \ker(u)$. Finalement, $\boxed{\ker(u) = \ker(v)}$.

► Soient maintenant u et v deux projecteurs de E ayant même noyau. Soit $x \in E$, écrivons $x = u(x) + x - u(x)$; nous savons que $x - u(x) \in \ker(u)$, donc $x - u(x) \in \ker(v)$; donc $v\big(x - u(x)\big) = \overrightarrow{0}$; donc $v(x) = v\big(u(x)\big) = (v \circ u)(x)$. Ainsi, $v \circ u = v$ et, par raison de symétrie, $\boxed{u \circ v = u}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Deux endomorphismes f et g de E commutent : $f \circ g = g \circ f$. Prouvez que $\ker(g)$ et $\operatorname{im}(g)$ sont stables par f. Établissez la réciproque lorsque g est un projecteur de E.

- Supposons $f \circ g = g \circ f$. Soit $x \in \ker(g)$: $g(x) = \overrightarrow{0}$, donc $(f \circ g)(x) = \overrightarrow{0}$, donc $g\big(f(x)\big) = \overrightarrow{0}$, donc $f(x) \in \ker(g)$. Ainsi, $\boxed{\ker(g) \text{ est stable par } f}$.

- Soit maintenant $y \in \operatorname{im}(g)$: il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Alors $f(y) = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, qui appartient à $\operatorname{im}(g)$. Donc $\boxed{\operatorname{im}(g) \text{ est stable par } f}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. u est un endomorphisme de E vérifiant $u^3 + u = \mathbf{0}$. Montrez que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{im}(u)$.

- Le théorème du rang nous donne $\dim\big(\ker(u)\big) + \dim\big(\operatorname{im}(u)\big) = \dim(E)$. Montrons que $\ker(u) \cap \operatorname{im}(u) = \{\overrightarrow{0}\}$: $y \in \ker(u) \cap \operatorname{im}(u)$ implique $u(y) = \overrightarrow{0}$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $u^2(x) = u\big(u(x)\big) = u(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ donc $u^3(x) = u\big(u^2(x)\big) = u(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ donc $u(x) = -u^3(x) = \overrightarrow{0}$ et finalement $u(x) = \overrightarrow{0}$. Ainsi, $\ker(u)$ et $\operatorname{im}(u)$ sont supplémentaires.

$\boxed{\text{Q10}}$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. f est un endomorphisme de E. Comparez $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$, puis $\operatorname{im}(f)$ et $\operatorname{im}(f^2)$. Montrez que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$$

- Les inclusions $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\operatorname{im}(f^2) \subset \operatorname{im}(f)$ sont banales.

- Il nous suffit donc de démontrer trois implications :

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Rightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$$

- Preuve de $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Rightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$: il suffit de monter que $\dim\big(\ker(f)\big) = \dim\big(\ker(f^2)\big)$. Nous remarquons que $\operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{im}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{im}(f^2)\big) = \operatorname{rg}(f^2)$; avec le théorème du rang, nous avons $\operatorname{rg}(f) + \dim\big(\ker(f)\big) = \dim(E)$ et $\operatorname{rg}(f^2) + \dim\big(\ker(f^2)\big) = \dim(E)$. Donc $\boxed{\dim\big(\ker(f)\big) = \dim\big(\ker(f^2)\big)}$.

- Preuve de $\ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$: il suffit cette fois d'établir $\dim\big(\operatorname{im}(f)\big) + \dim\big(\ker(f)\big) = \dim(E)$ et $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. La première égalité est une conséquence du théorème du rang. Pour la seconde : $y \in \operatorname{im}(f) \cap \ker(f)$ implique l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$; par ailleurs, $f(y) = \overrightarrow{0}$. Donc $f^2(x) = \overrightarrow{0}$, puis $x \in \ker(f^2)$ et à plus forte raison $x \in \ker(f)$, donc $f(x) = \overrightarrow{0}$. Nous en déduisons $y = f(x) = \overrightarrow{0}$, et enfin $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.

- Preuve de $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$: il suffit d'établir $\operatorname{im}(f) \subset \operatorname{im}(f^2)$. Soit $y \in \operatorname{im}(f)$; il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; comme $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont supplémentaires dans E, il existe $z \in \operatorname{im}(f)$ puis $y' \in E$ tel que $y' = f(x)$, et $t \in \ker(f)$ tel que $x = z + t = f(y') + z$; donc : $y = f(x)$: $f\big(f(y) + t\big) = f^2(y') + f(t) = f^2(y')$; mais ceci implique $y \in \operatorname{im}(f^2)$, et donc $\operatorname{im}(f) \subset \operatorname{im}(f^2)$.

$\boxed{\text{Q11}}$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. u et v sont deux endomorphismes de E vérifiant $u \circ v = \mathbf{0}$. Montrez l'inégalité $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant \dim(E)$. Nous supposons en outre $u + v$ bijective. Montrez que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim(E)$.

- $u \circ v = \mathbf{0}$, donc, pour tout $x \in E$: $u\big(v(x)\big) = \overrightarrow{0}$ implique $v(x) \in \ker(u)$, soit $\operatorname{im}(v) \subset \ker(u)$; donc $\dim\big(\operatorname{im}(v)\big) \leqslant \dim\big(\ker(u)\big) = \dim(E) - \dim\big(\operatorname{im}(u)\big)$. Nous en déduisons $\operatorname{rg}(v) \leqslant \dim(E) - \operatorname{rg}(u)$, soit $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant \dim(E)$.

- $u + v$ est bijective, donc $\operatorname{rg}(u + v) = \dim(E)$. Les résultats précédents noius donnent $\dim(E) = \operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant \dim(E)$ et donc $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim(E)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. ; $f \in \mathcal{L}(E)$; g est un projecteur de E. Montrez que, si $\operatorname{im}(g)$ et $\ker(g)$ sont stables par f, alors f et g commutent.

- g est un projecteur, donc $E = \operatorname{im}(g) \oplus \ker(g)$. Soit $u \in E$; il existe $v = g(u) \in \operatorname{im}(g)$ et $w = u - g(u) \in \ker(g)$. Alors $f(u) = f(v) + f(w)$, avec $f(v) \in \operatorname{im}(g)$ et $f(w) \in \ker(g)$. Donc $(g \circ f)(u) = g\big(f(u)\big) = g\big(f(v)\big) = f(v)$. Par ailleurs, $(f \circ g)(u) = f\big(g(u)\big) = f(v)$. Donc $(g \circ f)(u) = (f \circ g)(u)$, ce qui établit $f \circ g = g \circ f$.

- La réciproque est générale : si $f \circ g = g \circ f$, alors $\operatorname{im}(g)$ et $\ker(g)$ sont stables par f ; dans la foulée, $\operatorname{im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g !

- Voir l'exercice numéro 8

Un mini-problème, autour de trois projecteurs

► Soient p et q deux projecteurs de E.

Q1 $\star$ Prouvez que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = \mathbf{0}$.

► Supposons que $p+q$ est un projecteur : $p+q = (p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$ donc $pq + qp = \mathbf{0}$. Nous en déduisons $pq + pqp = \mathbf{0}$ et $pqp + pq = \mathbf{0}$; donc $pq = qp$. Comme nous avons à la fois $pq + qp = \mathbf{0}$ et $pq = qp$, nous en déduisons $\boxed{pq = qp = \mathbf{0}}$.

► $p \circ q = q \circ p = 0 \Rightarrow (p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + pq + qp + q = p + q \Rightarrow \boxed{p+q \text{ est un projecteur de } E}$.

► Nous supposons désormais que $p+q$ est un projecteur. Prouvez successivement que $\operatorname{im}(p) \cap \operatorname{im}(q) = \{\vec{0}\}$, $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$, $\operatorname{im}(p) + \operatorname{im}(q) = \operatorname{im}(p+q)$ et $\ker(p) + \ker(q) = E$.

► $x \in \operatorname{im}(p) \cap \operatorname{im}(q)$ implique l'existence de y et z appartenant à E, tels que $x = p(y) = q(z)$. Alors, comme $q^2 = q$, il vient $q(z) = q^2(z) = q\big(q(z)\big) = q\big(p(y)\big) = (qp)(y) = \mathbf{0}$ (ceci car $qp = \mathbf{0}$) ; donc $\boxed{x = \vec{0}}$.

► $x \in \ker(p+q) \Rightarrow p(x) = q(x) = \vec{0} \Rightarrow (p+q)(x) = \vec{0} \Rightarrow p\big(p(x) + q(x)\big) = \vec{0} \Rightarrow p^2(x) + pq(x) = \vec{0}$. Comme $p^2 = p$ et $pq = \mathbf{0}$, il vient $x \in \ker(p)$. Par symétrie, $x \in \ker(q)$. Résumons : $\boxed{\ker(p) \cap \ker(q) = \ker(p+q)}$.

► $x \in \ker(p) \cap \ker(q) \Rightarrow p(x) = q(x) = \vec{0} \Rightarrow (p+q)(x) = p(x) + q(x) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{x \in \ker(p+q)}$.

► Si $x \in \operatorname{im}(p+q)$, alors il existe y et z dans E tels que $x = p(y) + q(z) = p^2(y) + q^2(z) = (p+q)\big(p(y)\big) + (p+q)\big(q(z)\big)(p+q)\big(p(y) + q(z)\big)$. Donc $\boxed{x \in \operatorname{im}(p+q)}$.

► Si $x \in \operatorname{im}(p+q)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = (p+q)(y) = p(y) + q(y)$ donc $\boxed{x \in \operatorname{im}(p) \cap \operatorname{im}(q)}$.

► Soit $x \in E$: notons $y = x - p(x)$ et $z = p(x)$. $p^2 = p$ implique $y \in \ker(p)$; et $qp = \mathbf{0}$ implique $z \in \ker(q)$; comme $x = y + z$, il vient $x \in \ker(p) + \ker(q)$. Finalement : $\boxed{\ker(p) + \ker(q) = \mathbf{0}}$.

Un mini-problème, autour d'une famille engendrée par id et f

► Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et f un endomorphisme de E. L'endomorphisme identique de E est noté id. Notons $f^2 = f \circ f$, et, plus généralement, $f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f$. Nous supposons dans la suite que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id} = 0$.

Q1 Prouvez que $f - \mathrm{id}$ et $2\,\mathrm{id} - f$ sont des projecteurs.

► Nous savons que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{id}$. Donc $(f - \mathrm{id})^2 = f^2 - 2f + \mathrm{id} = 3f - 2\,\mathrm{id} - 2f + \mathrm{id} = f - \mathrm{id}$. De même : $(2\,\mathrm{id} - f)^2 = 4\,\mathrm{id} - 4f + f^2 = 4\,\mathrm{id} - 4f + 3f - 2\,\mathrm{id} = 2\,\mathrm{id} - f$, donc $(2\,\mathrm{id} - f)^2 = 2\,\mathrm{id} - f$. Ainsi, $f - \mathrm{id}$ et $2\,\mathrm{id} - f$ sont des projecteurs de E.

► Observons que $\ker(f - \mathrm{id})$ et $\ker(2\,\mathrm{id} - f)$ sont en somme directe : en effet, si $x \in \ker(f - \mathrm{id}) \cap \ker(2\,\mathrm{id} - f)$, alors $f(x) = x$ et $2x = f(x)$, donc $x = \vec{0}$: du coup, la somme $\ker(f - \mathrm{id}) + \ker(2\,\mathrm{id} - f)$ est directe.

► Enfin, tout $x \in E$ vérifie $(f - \mathrm{id} + 2\,\mathrm{id} - f)(x) = x$ donc tout $y \in E$ peut s'écrire $y = u + v$ avec $u \in \ker(f - \mathrm{id})$ et $v \in \ker(2\,\mathrm{id} - f)$. Donc $E = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(2\,\mathrm{id} - f)$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$; donnez une expression de f^n en fonction de f et id.

► Par récurrence, nous obtenons la formule $f^n = (2^n - 1)f - (2^n - 2)\,\mathrm{id}$.

Q3 La formule obtenue est-elle encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

► Il suffit de remplacer $n \geqslant 0$ par $-n$. La formule est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$; au besoin, reprendre le raisonnement par récurrence.

► Nous pouons définir une infinité de problèmes basés sur une équation de la forme $f^2 + \alpha f + \beta\,\mathrm{id}_E = \mathbf{0}$, avec α et β bien choisis.