

- Les exercices de cette feuille portent sur les projecteurs.

Projecteurs et projections

- Dans toute cette partie, E désigne un \mathbb{K} -e.v.

Q1 Existe-t-il des projecteurs p de E tels que $2p$ soit un projecteur ?

- Oui, mais le seul projecteur qui convient est le projecteur nul.

Q2 Existe-t-il des projecteurs p de E tels que $2\text{id} - 3p$ soit un projecteur ?

- Non : p devrait vérifier $2i - 3p = (2i - 3p)^2 = 4i - 12p + 9p^2 = 4i - 3p \neq 2i - 3p$.

Q3 Soit p un projecteur non banal ; déterminez les couples (α, β) tels que $\alpha \text{id} + \beta p$ soit un projecteur.

- $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

Q4 Soient p et q deux projecteurs de E . Montrez que $p \circ q = q$ ssi $\text{im}(q) \subset \text{im}(p)$; puis que $q \circ p = q$ ssi $\text{ker}(p) \subset \text{ker}(q)$.

- Supposons $p \circ q = q$. Soit $y \in \text{im}(q)$: il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$. Alors $y = (p \circ q)(x) = p(q(x))$ donc $y \in \text{im}(p)$. Ainsi $\boxed{\text{im}(q) \subset \text{im}(p)}$.
- Supposons maintenant $\text{im}(q) \subset \text{im}(p)$; soit $x \in E$; prouvons que $(p \circ q)(x) = q(x)$. Nous avons $q(x) \in \text{im}(q)$, donc $q(x) \in \text{im}(p)$, donc $q(x)$ est invariant par p , soit : $p(q(x)) = q(x)$ soit précisément $\boxed{(p \circ q)(x) = q(x)}$.
- Supposons $q \circ p = q$; soit $x \in \text{ker}(p)$: alors $p(x) = \vec{0}$, donc $q(p(x)) = \vec{0}$, soit $(q \circ p)(x) = \vec{0}$, donc $q(x) = \vec{0}$, donc $x \in \text{ker}(q)$. Ainsi, nous avons établi $\boxed{\text{ker}(p) \subset \text{ker}(q)}$.
- Supposons maintenant $\text{ker}(p) \subset \text{ker}(q)$. Soit $x \in E$, prouvons que $(q \circ p)(x) = q(x)$. Comme $(p \circ p)(x) = p(x)$, il vient $p(x) - x \in \text{ker}(p)$, donc $p(x) - x \in \text{ker}(q)$; ainsi $q(p(x) - x) = \vec{0}$, soit $(q \circ p)(x) = p(x)$. Ceci établit $\boxed{\text{ker}(p) \subset \text{ker}(q)}$.

Q5 Un projecteur p peut-il vérifier $\text{ker}(p) = \text{im}(p)$?

- Oui, si $\text{im}(p) \subset \text{ker}(p)$; dans ce cas, $p^2 = \mathbf{0}$.

Q6 Deux projecteurs p et q de E vérifient $p \circ q = \alpha q \circ p$. Soit $\alpha \notin \{0, 1\}$. Montrez que $p \circ q = q \circ p = \mathbf{0}$.

- $x \in \text{ker}(p) \Rightarrow p(x) = \vec{0} \Rightarrow \alpha(q \circ p)(x) \Rightarrow (p \circ q)(x) = \vec{0}$.
- Soit $y \in \text{im}(p)$. Alors : $p(y) = y \Rightarrow \alpha(q \circ p)(y) = \alpha q(y) \Rightarrow (p \circ q)(y) = \alpha q(y)$. Comme $\alpha \notin \{0, 1\}$, nous avons nécessairement $q(y) = \vec{0}$ et à plus forte raison $(p \circ q)(y) = \vec{0}$.
- $E = \text{ker}(p) \oplus \text{im}(p) \Rightarrow p \circ q = \mathbf{0}$; comme $\alpha \neq 0$, nous aurons $q \circ p = \frac{1}{\alpha} p \circ q = \mathbf{0}$.
- Autre méthode, plus rapide : $p \circ q = p \circ q^2 = p \circ q \circ q = \alpha q \circ p \circ q = \alpha^2 q \circ p$ d'où $\alpha q \circ p = \alpha^2 q \circ p$; mais $\alpha^2 \neq \alpha$, donc $q \circ p = \mathbf{0}$ et par suite $p \circ q = \alpha q \circ p = \mathbf{0}$.

Q7 u et v sont deux endomorphismes de E . Prouvez que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ ssi u et v sont deux projecteurs ayant même noyau.

- Supposons $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$. Alors $u = u \circ u = (u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u)$ et de même $v \circ v = v$; donc u et v sont des projecteurs. Soit $x \in \text{ker}(u)$: alors $u(x) = \vec{0} \Rightarrow v(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(\vec{0}) = \vec{0}$; donc $\text{ker}(u) \subset \text{ker}(v)$. Par raison de symétrie, $\text{ker}(v) \subset \text{ker}(u)$. Finalement, $\boxed{\text{ker}(u) = \text{ker}(v)}$.
- Soient maintenant u et v deux projecteurs de E ayant même noyau. Soit $x \in E$, écrivons $x = u(x) + x - u(x)$; nous savons que $x - u(x) \in \text{ker}(u)$, donc $x - u(x) \in \text{ker}(v)$; donc $v(x - u(x)) = \vec{0}$; donc $v(x) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$. Ainsi, $v \circ u = v$ et, par raison de symétrie, $\boxed{u \circ v = u}$.

Q8 Deux endomorphismes f et g de E commutent : $f \circ g = g \circ f$. Prouvez que $\ker(g)$ et $\operatorname{im}(g)$ sont stables par f . Établissez la réciproque lorsque g est un projecteur de E .

- ▶ Supposons $f \circ g = g \circ f$. Soit $x \in \ker(g) : g(x) = \vec{0}$, donc $(f \circ g)(x) = \vec{0}$, donc $g(f(x)) = \vec{0}$, donc $f(x) \in \ker(g)$. Ainsi, $\boxed{\ker(g) \text{ est stable par } f}$.
- ▶ Soit maintenant $y \in \operatorname{im}(g) : \text{il existe } x \in E \text{ tel que } y = g(x)$. Alors $f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, qui appartient à $\operatorname{im}(g)$. Donc $\boxed{\operatorname{im}(g) \text{ est stable par } f}$.

Q9 E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. u est un endomorphisme de E vérifiant $u^3 + u = \mathbf{0}$. Montrez que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{im}(u)$.

- ▶ Le théorème du rang nous donne $\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{im}(u)) = \dim(E)$. Montrons que $\ker(u) \cap \operatorname{im}(u) = \{\vec{0}\} : y \in \ker(u) \cap \operatorname{im}(u)$ implique $u(y) = \vec{0}$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $u^2(x) = u(u(x)) = u(\vec{0}) = \vec{0}$ donc $u^3(x) = u(u^2(x)) = u(\vec{0}) = \vec{0}$ donc $u(x) = -u^3(x) = \vec{0}$ et finalement $u(x) = \vec{0}$. Ainsi, $\ker(u)$ et $\operatorname{im}(u)$ sont supplémentaires.

Q10 E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n . f est un endomorphisme de E . Comparez $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$, puis $\operatorname{im}(f)$ et $\operatorname{im}(f^2)$. Montrez que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$$

- ▶ Les inclusions $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\operatorname{im}(f^2) \subset \operatorname{im}(f)$ sont banales.
- ▶ Il nous suffit donc de démontrer trois implications :

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Rightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$$

- ▶ Preuve de $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Rightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$: il suffit de montrer que $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$. Nous remarquons que $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\operatorname{im}(f^2)) = \operatorname{rg}(f^2)$; avec le théorème du rang, nous avons $\operatorname{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$ et $\operatorname{rg}(f^2) + \dim(\ker(f^2)) = \dim(E)$. Donc $\boxed{\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))}$.
- ▶ Preuve de $\ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$: il suffit cette fois d'établir $\dim(\operatorname{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$ et $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f) = \{\vec{0}\}$. La première égalité est une conséquence du théorème du rang. Pour la seconde : $y \in \operatorname{im}(f) \cap \ker(f)$ implique l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$; par ailleurs, $f(y) = \vec{0}$. Donc $f^2(x) = \vec{0}$, puis $x \in \ker(f^2)$ et à plus forte raison $x \in \ker(f)$, donc $f(x) = \vec{0}$. Nous en déduisons $y = f(x) = \vec{0}$, et enfin $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f) = \{\vec{0}\}$.
- ▶ Preuve de $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$: il suffit d'établir $\operatorname{im}(f) \subset \operatorname{im}(f^2)$. Soit $y \in \operatorname{im}(f)$; il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; comme $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont supplémentaires dans E , il existe $z \in \operatorname{im}(f)$ puis $y' \in E$ tel que $y' = f(x)$, et $t \in \ker(f)$ tel que $x = z + t = f(y') + t$; donc : $y = f(x) : f(f(y') + t) = f^2(y') + f(t) = f^2(y')$; mais ceci implique $y \in \operatorname{im}(f^2)$, et donc $\operatorname{im}(f) \subset \operatorname{im}(f^2)$.

Q11 E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n . u et v sont deux endomorphismes de E vérifiant $u \circ v = \mathbf{0}$. Montrez l'inégalité $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq \dim(E)$. Nous supposons en outre $u + v$ bijective. Montrez que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim(E)$.

- ▶ $u \circ v = \mathbf{0}$, donc, pour tout $x \in E : u(v(x)) = \vec{0}$ implique $v(x) \in \ker(u)$, soit $\operatorname{im}(v) \subset \ker(u)$; donc $\dim(\operatorname{im}(v)) \leq \dim(\ker(u)) = \dim(E) - \operatorname{rg}(u)$. Nous en déduisons $\operatorname{rg}(v) \leq \dim(E) - \operatorname{rg}(u)$, soit $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq \dim(E)$.
- ▶ $u + v$ est bijective, donc $\operatorname{rg}(u + v) = \dim(E)$. Les résultats précédents nous donnent $\dim(E) = \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq \dim(E)$ et donc $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim(E)$.

Q12 E est un \mathbb{K} -e.v. ; $f \in \mathcal{L}(E)$; g est un projecteur de E . Montrez que, si $\operatorname{im}(g)$ et $\ker(g)$ sont stables par f , alors f et g commutent.

- ▶ g est un projecteur, donc $E = \operatorname{im}(g) \oplus \ker(g)$. Soit $u \in E$; il existe $v = g(u) \in \operatorname{im}(g)$ et $w = u - g(u) \in \ker(g)$. Alors $f(u) = f(v) + f(w)$, avec $f(v) \in \operatorname{im}(g)$ et $f(w) \in \ker(g)$. Donc $(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(f(v)) = f(v)$. Par ailleurs, $(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(v)$. Donc $(g \circ f)(u) = (f \circ g)(u)$, ce qui établit $f \circ g = g \circ f$.
- ▶ La réciproque est générale : si $f \circ g = g \circ f$, alors $\operatorname{im}(g)$ et $\ker(g)$ sont stables par f ; dans la foulée, $\operatorname{im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g !
- ▶ Voir l'exercice numéro 8

Un mini-problème, autour de trois projecteurs

► Soient p et q deux projecteurs de E .

Q1 ★ Prouvez que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = \mathbf{0}$.

- Supposons que $p + q$ est un projecteur : $p + q = (p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$ donc $pq + qp = \mathbf{0}$. Nous en déduisons $pq + pqp = \mathbf{0}$ et $pqp + pq = \mathbf{0}$; donc $pq = qp$. Comme nous avons à la fois $pq + qp = \mathbf{0}$ et $pq = qp$, nous en déduisons $\boxed{pq = qp = \mathbf{0}}$.
- $p \circ q = q \circ p = \mathbf{0} \Rightarrow (p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + pq + qp + q = p + q \Rightarrow \boxed{p + q \text{ est un projecteur de } E}$.
- Nous supposons désormais que $p + q$ est un projecteur. Prouvez successivement que $\text{im}(p) \cap \text{im}(q) = \{\vec{0}\}$, $\text{ker}(p + q) = \text{ker}(p) \cap \text{ker}(q)$, $\text{im}(p) + \text{im}(q) = \text{im}(p + q)$ et $\text{ker}(p) + \text{ker}(q) = E$.
- $x \in \text{im}(p) \cap \text{im}(q)$ implique l'existence de y et z appartenant à E , tels que $x = p(y) = q(z)$. Alors, comme $q^2 = q$, il vient $q(z) = q^2(z) = q(q(z)) = q(p(y)) = (qp)(y) = \mathbf{0}$ (ceci car $qp = \mathbf{0}$) ; donc $\boxed{x = \vec{0}}$.
- $x \in \text{ker}(p + q) \Rightarrow p(x) = q(x) = \vec{0} \Rightarrow (p + q)(x) = \vec{0} \Rightarrow p(p(x) + q(x)) = \vec{0} \Rightarrow p^2(x) + pq(x) = \vec{0}$. Comme $p^2 = p$ et $pq = \mathbf{0}$, il vient $x \in \text{ker}(p)$. Par symétrie, $x \in \text{ker}(q)$. Résumons : $\boxed{\text{ker}(p) \cap \text{ker}(q) = \text{ker}(p + q)}$.
- $x \in \text{ker}(p) \cap \text{ker}(q) \Rightarrow p(x) = q(x) = \vec{0} \Rightarrow (p + q)(x) = p(x) + q(x) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{x \in \text{ker}(p + q)}$.
- Si $x \in \text{im}(p + q)$, alors il existe y et z dans E tels que $x = p(y) + q(z) = p^2(y) + q^2(z) = (p + q)(p(y)) + (p + q)(q(z))$. Donc $\boxed{x \in \text{im}(p + q)}$.
- Si $x \in \text{im}(p + q)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = (p + q)(y) = p(y) + q(y)$ donc $\boxed{x \in \text{im}(p) \cap \text{im}(q)}$.
- Soit $x \in E$: notons $y = x - p(x)$ et $z = p(x)$. $p^2 = p$ implique $y \in \text{ker}(p)$; et $qp = \mathbf{0}$ implique $z \in \text{ker}(q)$; comme $x = y + z$, il vient $x \in \text{ker}(p) + \text{ker}(q)$. Finalement : $\boxed{\text{ker}(p) + \text{ker}(q) = E}$.

Un mini-problème, autour d'une famille engendrée par id et f

► Soient E un \mathbb{K} -e.v. et f un endomorphisme de E . L'endomorphisme identique de E est noté id . Notons $f^2 = f \circ f$, et, plus généralement, $f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f$. Nous supposons dans la suite que $f^2 - 3f + 2\text{id} = \mathbf{0}$.

Q1 Prouvez que $f - \text{id}$ et $2\text{id} - f$ sont des projecteurs.

- Nous savons que $f^2 = 3f - 2\text{id}$. Donc $(f - \text{id})^2 = f^2 - 2f + \text{id} = 3f - 2\text{id} - 2f + \text{id} = f - \text{id}$. De même : $(2\text{id} - f)^2 = 4\text{id} - 4f + f^2 = 4\text{id} - 4f + 3f - 2\text{id} = 2\text{id} - f$, donc $(2\text{id} - f)^2 = 2\text{id} - f$. Ainsi, $f - \text{id}$ et $2\text{id} - f$ sont des projecteurs de E .
- Observons que $\text{ker}(f - \text{id})$ et $\text{ker}(2\text{id} - f)$ sont en somme directe : en effet, si $x \in \text{ker}(f - \text{id}) \cap \text{ker}(2\text{id} - f)$, alors $f(x) = x$ et $2x = f(x)$, donc $x = \vec{0}$: du coup, la somme $\text{ker}(f - \text{id}) + \text{ker}(2\text{id} - f)$ est directe.
- Enfin, tout $x \in E$ vérifie $(f - \text{id} + 2\text{id} - f)(x) = x$ donc tout $y \in E$ peut s'écrire $y = u + v$ avec $u \in \text{ker}(f - \text{id})$ et $v \in \text{ker}(2\text{id} - f)$. Donc $E = \text{ker}(f - \text{id}) \oplus \text{ker}(2\text{id} - f)$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$; donnez une expression de f^n en fonction de f et id .

- Par récurrence, nous obtenons la formule $f^n = (2^n - 1)f - (2^n - 2)\text{id}$.

Q3 La formule obtenue est-elle encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

- Il suffit de remplacer $n \geq 0$ par $-n$. La formule est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$; au besoin, reprendre le raisonnement par récurrence.
- Nous pouvons définir une infinité de problèmes basés sur une équation de la forme $f^2 + \alpha f + \beta \text{id}_E = \mathbf{0}$, avec α et β bien choisis.