Sup PCSI2 — Exercices d'algèbre linéaire avec corrigés (2e)

► Les exercices de cette feuille portent sur les applications linéaires ; la dimension de l'espace vectoriel ambiant peut être finie ou infinie.

Applications linéaires

Q1 E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque. f et g appartiennent à $\mathcal{L}(E)$. Prouvez que $f\big(\ker(g \circ f)\big) = \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$.

► $y \in \ker(g \circ f)$ implique $(g \circ f)(y) = \overrightarrow{0}$, soit $g\big(f(y)\big) = \overrightarrow{0}$. Alors $f(y) \in \ker(g)$; et comme $f(y) \in \operatorname{im}(f)$, il vient $y \in \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$.

► Soit $y \in \ker(g) \cap \operatorname{im}(f)$. Alors $g(y) = \overrightarrow{0}$ et $y = f(x)$, avec $x \in E$. Donc $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = \overrightarrow{0}$, donc **À FAIRE !**

► Une remarque générale : soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Si $p < n$, alors f est surjective mais non injective ; si $p > n$, alors f est injective mais non surjective. Si $p = n$, alors f est soit **À FAIRE !**
