Sup PCSI2 — Exercices d'algèbre linéaire avec corrigés (2d)

► Cette feuille portent sur les points suivants : sous-espaces vectoriels, rang, base, dimension, etc.

Sommes de sous-espaces

Q1 abd, feuille 24, exercice 1.1

f est une fonction de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$, définie comme suit : $f(x,y,z)=(x+y,x+2y,x-y)$. Montrez que f est linéaire. Donnez le rang de f, en précisant une base de $\mathrm{im}(f)$.

► Il est clair que f est linéaire. $(x,y)\in\ker(f)$ ssi $x+y=0$, $x+2y=0$ et $x-y=0$; ceci se ramène à $x=y=0$, donc $\ker(f)=\{\overrightarrow{0}\}$, donc $\dim\big(\ker(f)\big)=0$, puis $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{K}^2)$.

Q2 abd, feuille 24, exercice 1.2

f est une fonction de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^3$, définie comme suit : $f(x,y,z)=(x+2y+z,2x+y+z,x+y+2z)$. Donnez le rang de f, en précisant une base de $\mathrm{im}(f)$.

► f est clairement linéaire. $(x,y,z)\in\ker(f)$ ssi $x+2y+z=2x+y+z=x+y+2z=0$; par adition, il vient $4(x+y+z)=0$, donc $x+y+z=0$; par soustraction, nous obtenons $x=y=z=0$. Donc $\ker(f)=\{\overrightarrow{0}\}$. Par suite, f est injective : le théorème du rang nous dit que f est un automorphisme de $\mathbb{K}^3$.

Q3 abd, feuille 24, exercice 1.3

f est une fonction de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$, définie comme suit : $f(x,y,z)=(x+y+z,x-y-z)$. Donnez le rang de f, en précisant une base de $\mathrm{im}(f)$.

► f est clairement linéaire. Observons que $(x,y,z)\in\ker(f)$ ssi $x=0$ et $y+z=0$. Donc $\ker(f)=\mathbb{K}(0,-1,1)$, et f n'est pas injective. $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{K}^3)-\dim\big(\ker(f)\big)=\dim(\mathbb{K}^2)$: donc $\mathrm{im}(f)=\mathbb{K}^2$ et f est surjective.

Q4 abd, feuille 24, exercice 1.4

f est clairement linéaire. C'est une fonction de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^3$, définie comme suit : $f(x,y,z)=(x+2y+z,2x+y+z,x-y)$. Donnez le rang de f, en précisant une base de $\mathrm{im}(f)$.

► Déterminons le noyau de f : $(x,y,z)\in\ker(f)\Rightarrow f(x,y,z)=(0,0,0)$, soit $x+2y+z=0$, $2x+y+z=0$ et $x-y=0$. Ceci se réduit facilement à $x=y$ et $z=-3y$. Donc $\ker(f)=\mathbb{K}(1,1,-3)$. Donc f n'est pas injective. Le théorème du rang nous donne $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{K}^3)=\dim\big(\ker(f)\big)=2$.

Q5 abd, feuille 24, exercice 1.5

f est une fonction de $\mathbb{K}^4$ dans $\mathbb{K}^3$, définie comme suit : $f(x,y,z,t)=(x+y,z-t,x+t)$. Donnez le rang de f, en précisant une base de $\mathrm{im}(f)$.

► Observons que f est linéaire, et qu'elle ne peut pas être une injection de $\mathbb{K}^4$ dans $\mathbb{K}^3$. Le noyau de f est l'ensemble des quadruplets (x,y,z,t) tels que $f(x,y,z,t)=\overrightarrow{0}$, ce qui revient à résoudre le système cobstitué des trois équation $x+y=0$, $z-t=0$ et $x+t=0$; ce qui revient aux formules $z=t$, $x=-t$ et $y=-x=t$. Le noyau de f est donc $\mathbb{K}(-t,t,t,t)$, si bien que $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

► Le théorème du rang montre que $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{K}^4)-\dim\big(\ker(f)\big)=\dim(\mathbb{K}^3)$ donc $\mathrm{im}(f)=\mathbb{K}^3$, et $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

Q6 abd, feuille 17, exercice 2.1

$E=\mathbb{K}^3$; $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3 \mid x+y+2z=0\big\}$; $G=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3 \mid y-z=0\big\}$. Donnez des bases de F, G, $F+G$ et $F\cap G$.

► F est un plan vectoriel ; une base de ce plan est, par exemple, constituée des vecteurs $a=(2,0,-1)$ et $b=(1,-1,0)$.

► G est également un plan vectoriel ; une base de ce plan est, par exemple, constituée des vecteurs $c=(1,0,0)$ et $d=(0,1,1)$.

► $F+G$ contient les vecteurs $c=(1,0,0)$, $b-c=(0,-1,0)$ et $a-2c=(0,0,-1)$; comme l'espace ambiant est $\mathbb{K}^3$, nous avons une famille génératrice de $F+G$, constituée des trois vecteurs cités précédemment. Visiblement, cette famille est libre : donc c'est une base de $\mathbb{K}^3$.

► Il reste à donner la dimension de $F\cap G$. Le vecteur (x,y,z) est dans $F\cap G$ ssi $x+y+2z=0$ et $y-z=0$, soit $y=z$ et $x=-3z$. Donc $F\cap G=\mathbb{K}(-3,1,1)$. Donc $\dim(F\cap G)=1$, une base étant constituée du vecteur $(-3,1,1)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ est défini par $f(1,0,0) = (0,1,2)$, $f(0,1,0) = (-1,1,0)$ et $f(0,0,1) = 2,0,0)$. Montrez que f est un automorphisme de $\mathbb{K}^3$; déterminez sa bijection réciproque.

- Un calcul facile nous donne $f(x,y,z) = (-y+2z, x+y, 2x)$. f est injective car $f(x,y,z) = \overrightarrow{0}$ implique $-y+2z = x+y = 2x = 0$; donc $x = 0$, puis $y = 0$, puis $z = 0$. Donc f est injective ; par suite, c'est un automorphisme de $\mathbb{K}^3$.
- **Déterminer la bijection réciproque de** f. $X = (x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ possède un (et un seul) antécédent Y par f^{-1}, qui est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Y = f^{-1}(X) &\iff f(Y) = X \iff (-b+2c, a+b, 2a) = (x,y,z) \\ &\iff -b+2c = x \text{ et } a+b = y \text{ et } 2a = z \\ &\iff a = x/2 \text{ et } b = y - z/2 \text{ et } c = x/2 + y/2 - z/4 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q8}}$ **Un exercice en dimension 3, avec un paramètre.**
Notons $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,2,3)$ et $\vec{w} = (a,a^2,a^3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est-elle libre ? Pour quelles valeurs est-elle liée ?

- Écrivons que la combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par les scalaires p, q et r est nulle :

$$\begin{aligned} p\vec{u} + q\vec{v} + r\vec{w} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow p(1,1,1) + q(1,2,3) + r(a,a^2,a^3) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow (p+q+ra, p+2q+ra^2, p+3q+ra^3) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p + q + ra = 0 \\ p + 2q + ra^2 = 0 \\ p + 3q + ra^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q + ra = 0 \\ q + r(a^2-a) = 0 \\ 2q + r(a^3-a^2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow pqra(a-1)(a-2) = 0 \end{aligned}$$

Donc le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est libre, sauf si $a \in \{0{,}1{,}2\}$.

- Si $a = 0$, alors le vecteur $\vec{w}$ est nul ; le sous-espace engendré est $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$. Si $a = 1$, alors $\vec{w} = \vec{u}$; ici encore, le sous-espace engendré est $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$. Si $a = 2$, alors $\vec{w} = (2,4,8)$; la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est libre.
