► Les exercices de cette feuille portent sur les endomorphismes et automorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

Automorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie

Q1 **Petit exercice numérique très facile.**
φ est une fonction de $\mathbb{K}^2$ dans lui-même, définie comme suit : $\varphi:\ (x,y)\mapsto(x+3y,2x+7y)$. Montrez que φ est bijective ; explicitez son isomorphisme inverse.

► Il suffit, par exemple, de montrer que φ est injective. Les vecteurs $u=(1,3)$ et $v=(2,7)$ sont indépendants, donc $\ker(\varphi)\neq(\overrightarrow{0},\overrightarrow{0})$. Ainsi, φ est un automorphisme de $\mathbb{K}^2$.

► Les opérations $\mathcal{L}_2-2\mathcal{L}_1$ et $7\mathcal{L}_1-3\mathcal{L}_2$ nous donnent $x=7u-3v$ et $y=-2u+v$: ceci définit l'automorphisme inverse de φ.

Q2 **Un endomorphisme très simple.**
φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(e_1)=e_2$ et $\varphi(e_2)=\overrightarrow{0}$. Montrez que $\ker(\varphi)=\operatorname{im}(\varphi)$.

► L'image de $\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$ par φ est $\operatorname{Vect}(e_2)=\operatorname{im}(\varphi)$. Le noyau de φ est l'ensemble des vecteurs de la forme $(\overrightarrow{0},y)$, soit $\mathbb{R}e_2$. Ainsi, $\ker(\varphi)=\operatorname{im}(\varphi)=\mathbb{R}e_2$.

Q3 **Dimension d'un $\mathbb{K}$-e.v.**
E est un $\mathbb{K}$e-.v. de dimension n. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E)$? Même question, avec cette fois E de dimension n et F de dimension p.

► Une base de $\mathcal{L}(E)$ est parfaitement définie par la donnée des n^2 fonctions de la forme $e_i\mapsto e_j$.

► Plus généralement, une base de $\mathcal{L}(E,F)$ est parfaitement définie par la donnée des $n\times p$ fonctions de la forme $e_i\mapsto e_j$.

Q4 **Un exemple d'automorphisme de $\mathbb{K}^3$.**
Montrez que la fonction $f:\ (x,y,z)\mapsto(z,x-y,y+z)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^3$.

► Pa définition, f est une fonction de $\mathbb{K}^3$ dans lui-même. Prouvons la linéarité de f :

$$\begin{aligned}
f\big((x,y,z)+\lambda(x',y',z')\big) &= f(x+\lambda x',y+\lambda y',z+\lambda z')\\
&= (z+\lambda z',x+\lambda x'-(y+\lambda y'),y+\lambda y'+z+\lambda z')\\
f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z') &= (z,x-y,y+z)+\lambda(z',x'-y',y'+z')\\
&= \big(z+\lambda z',x-y+\lambda(x'-y'),y+z+\lambda(y'+z')\big)\\
&= \big(z+\lambda z',x+\lambda x'-(y+\lambda y'),y+\lambda y'+z+\lambda z'\big)
\end{aligned}$$

Ceci vaut quels que soient x, y, z, x', y', z' et λ. Ce qui termine la preuve.

► Pour établir que f est un automorphisme, il suffit de prouver que $\ker(f)$ se réduit au vecteur nul. Or $f(x,y,z)=\overrightarrow{0}\Rightarrow(z,x-y,y+z)=\overrightarrow{0}\Rightarrow z=x-y=y+z=0$; donc $z=0$; puis, comme $y+z=0$, il vient $y=0$; enfin, comme $x-y=0$, il vient $x=0$. Ainsi $x=y=z=0$: f est injective, donc c'est un automorphisme de $\mathbb{K}^3$.

► Si $E=\mathbb{R}$, nous pouvons définir une infinité d'exercices de cette forme.

Q5 **Avec des complexes !**
Montrez que $g:\ z\mapsto 2z-\overline{z}$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$ et explicitez son automorphisme inverse.

- Notons $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous aurons $\overline{z} = \overline{a + ib} = a - ib$. Donc :

$$\begin{aligned} g(z + \lambda z') &= 2(z + \lambda z') - \overline{z + \lambda z'} = 2\big(a + ib + \lambda(a' + ib')\big) - \overline{a + ib + \lambda(a' + ib')} \\ &= 2(a + \lambda a') + 2i(b + \lambda b') - \big(a + \lambda a' - i(b + \lambda b')\big) \\ &= 2a + 2ib - a + ib + 2\lambda a' + 2i\lambda b' - \lambda a' + i\lambda b' \\ &= a + 3ib + \lambda(a' + 3ib') \end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} g(z) + \lambda g(z') = 2z - \overline{z} + \lambda(2z' - \overline{z'}) &= 2(a + ib) - \overline{a + ib} + \lambda\big(2(a + ib) - \overline{a + ib}\big) \\ &= 2(a + ib) - (a - ib) + \lambda\big(2(a' + ib') - (a' - ib')\big) \\ &= a + 3ib + \lambda(a' + 3ib') = g(z) + \lambda g(z') \end{aligned}$$

Ceci montre que g est linéaire.

- Il reste à montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$; notons $z = a + ib$, comme plus haut ; il vient :

$$g(z) = 0 \Rightarrow 2z - \overline{z} = 0 \Rightarrow 2(a + ib) - \overline{a + ib} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } 3b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow z = 0$$

Ce qui termine la preuve !

- En jouant sur les coefficients de z et $\overline{z}$, nous pouvons fabriquer une infinité d'exercices de ce type !

$\boxed{\text{Q6}}$ φ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$, définie comme suit : $\varphi(x, y, z, t) = (x + t, 0, y + z)$. Montrez que φ est linéaire. Explicitez $\ker(\varphi)$, puis $\mathrm{im}(\varphi)$.

- Notons déjà que $\varphi(0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Soient (x, y, z, t) et (x', y', z', t') deux quadruplets de réels, et λ un réel. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi\big((x, y, z, t) + \lambda(x', y', z', t')\big) &= \varphi(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z', t + \lambda t') \\ &= \big(x + t + \lambda(x' + t'), 0, y + z + \lambda(y' + z')\big) \\ &= \big(x + \lambda x' + t + \lambda t', 0, y + \lambda y' + t + \lambda t'\big) \\ &= \varphi(x + t, 0, y + z) + \lambda\varphi(x' + t', 0, y' + z') \end{aligned}$$

Ceci prouve la linéarité de φ.

- $(x, y, z, t) \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x + t = 0$ et $y + z = 0$; ainsi, $\ker(\varphi)$ est défini par les équations $x + t = 0$ et $y + z = 0$. $\ker(\varphi)$ est un sous-espace de dimension 2.

- $\mathrm{im}(\varphi)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $(u, 0, v)$: en effet, $u = x + t$ et $v = y + z$ sont quelconques. $\mathrm{im}(\varphi) = \big\{(u, 0, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\big\}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ E est un $\mathbb{K}$-e.v. g est un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = f^2 + f$. Montrez que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$. Indication : observez $f \circ (f^2 - f - \mathrm{id})$.

- L'égalité $f^3 = f^2 + f$ peut s'écrire $f^3 - f^2 - f = \mathbf{0}$, soit $f \circ (f^2 - f - \mathrm{id}_E) = \mathbf{0}$, mais aussi $(f^2 - f - \mathrm{id}_E) \circ f = \mathbf{0}$. Donc $f^2 - f - \mathrm{id}_E$ et f sont inverses l'un de l'autre.

- Le théorème du rang implique $\dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{im}(f)\big) = \dim(E)$. Il nous suffit donc d'établir $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. Il suffit de montrer que $E = \dim\big(\ker(f)\big) \oplus \dim\big(\mathrm{im}(f)\big)$. La première égalité résulte du théorème du rang. Pour la deuxième : $y \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f) \Rightarrow \exists x \in E :\ y = f(x)$ et $f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f^2(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x \in \ker(f^2) = \ker(f) \Rightarrow f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x = f(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$
