► Les exercices de cette feuille portent sur les applications linéaires, en dimension quelconque.

Applications linéaires en dimension quelconque

Q1 **Relations entre morphismes.**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque. G et H sont deux s.e.v. de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrez que $f(G+H) = f(G) + f(H)$. Votre démonstration utilise-t-elle la linéarité de f ?

► Soient $y \in f(G) + f(H)$; alors il existe $u \in G$ et $v \in H$ tels que $y = f(u) + f(v)$; comme f est linéaire, il vient $y = f(u+v) \in f(G+H)$. Donc $f(G+H) \subset f(G) + f(H)$.

► Inversement, soit $y \in f(G+H)$; alors $y = f(u+v)$ avec $u \in G$ et $v \in H$; donc $y = f(u+v) \in f(G+H)$. Ainsi $f(G) + f(H) \subset f(G+H)$ et la preuve est terminée.

Q2 **Autour d'un endomorphisme.**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque. g un endomorphisme de E vérifiant $g^3 = g^2 + g + \mathrm{id}$. Montrez que g est bijectif et explicitez son automorphisme inverse.

► g commute avec tous ses itérés. Nous avons donc $\mathrm{id} = g^3 - g^2 - g = g \circ (g^2 - g - \mathrm{id}) = (g^2 - g - \mathrm{id}) \circ g$. Ainsi, g est inversible, et son inverse est $g^{-1} = g^2 - g - \mathrm{id}$.

Q3 ⋆⋆ **Autour d'un endomorphisme (suite).**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque. f et g sont deux endomorphismes de E, qui vérifient $f^2 = 2f + f \circ g - \mathrm{id}$. Comparez $f \circ g$ et $g \circ f$. *Indication* : écrivez d'une autre façon la condition de l'énoncé.

► Observons que $2f + f \circ g - f^2 = \mathrm{id}$; f admet donc une inverse à droite dans $\mathcal{L}(E)$; par suite, $f \in GL(E)$. En composant à gauche par f^{-1}, il vient $f = 2\,\mathrm{id} + g - f^{-1}$ soit $g = f + f^{-1} - 2\,\mathrm{id}$: f commute avec f, f^{-1} et id, donc avec g. Ainsi, $f \circ g = g \circ f$.

Q4 E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque. F, G et H sont trois $\mathbb{K}$-s.e.v. de E. $p \in \mathcal{L}(E, F)$ et $q \in \mathcal{L}(F, G)$. Prouvez les relations $\ker(p) \subset \ker(q \circ p)$ et $\mathrm{im}(q \circ p) \subset \mathrm{im}(q)$.

► $x \in \ker(p) \Rightarrow p(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow q\big(p(x)\big) = \overrightarrow{0} \Rightarrow (q \circ p)(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x \in \ker(q \circ p)$.

► Si $y \in \mathrm{im}(q \circ p)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (q \circ p)(x) = q\big(p(x)\big)$, donc $y \in \mathrm{im}(q)$.

Q5 E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque. f est un endomorphisme de E. G est un s.e.v. de E. Prouvez l'égalité $f^{-1}\big(f(G)\big) = G + \ker(f)$.

► $u \in f^{-1}\big(f(G)\big)$ implique $f(u) \in f(G)$, donc il existe $v \in F$ tel que $f(u) = f(v)$, donc $f(u - v) = \overrightarrow{0}$, soit $u - v \in \ker(f)$. Donc $\boxed{u \in G + \ker(f)}$.

► $u \in G + \ker(f)$ implique l'existence de $v \in G$ et $w \in \ker(f)$ tels que $u = v + w$. Alors $f(u) = f(v + w) = f(v) + f(w) = f(v)$ car $w \in \ker(f)$. Mais $v \in G$, donc $f(v) \in f(G)$; comme $f(u) \in f(G)$, nous déduisons $\boxed{u \in f^{-1}\big(f(G)\big)}$.

Q6 **Définition d'un endomorphisme produit**. E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions quelconques. $g \in \mathcal{L}(E, F)$. Prouvez que $\varphi : (x, y) \in E \times F \mapsto \big(x, y - g(x)\big)$ est un endomorphisme de $E \times F$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{K}$-e.v. produit.

- Par définition, $\varphi(x,y) \in E \times F$.
- Soient x, x' dans E, y, y' dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
$$\begin{aligned}\varphi\big((x,y)+\lambda(x',y')\big) &= \varphi(x+\lambda x', y+\lambda y') = \big(x+\lambda x', y+\lambda y' - g(x+\lambda x')\big)\\ &= \big(x+\lambda x', y+\lambda y' - g(x) - \lambda g(x')\big) = \big(x, y-\lambda g(x)\big) + \big(x', y' - \lambda g(x')\big)\\ &= \varphi(x,y) + \lambda\varphi(x',y')\end{aligned}$$
Ceci prouve la linéarité de φ.
- Montrons que φ est injective : $\varphi(x,y) = (\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}) \Rightarrow \big(x, y-g(x)\big) = (\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}) \Rightarrow x = \overrightarrow{0}$ et $y - g(x) = \overrightarrow{0}$; alors $y = g(x) = g(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Ainsi $\varphi(x,y) = (\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0})$. Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est injective}}$.
- Montrons que φ est surjective : soit $(u,v) \in E \times F$. Déterminons $(x,y) \in E \times F$ tel que $\varphi(x,y) = (u,v)$, soit $\big(x, y-g(x)\big) = (u,v)$, ou encore $x = u$ et $y - g(x) = v$, ce qui revient à $y = v + g(x)$; ainsi, l'antécédent de (u,v) par φ est le couple $\big(u, v+g(u)\big)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ **Autour de suites de réels.**
E est l'espace vectoriel des suites de réels ; F est l'ensemble des suites convergentes vers 0 ; G est l'ensemble des suites constantes ; H est l'ensemble des suites convergentes. Montrez que H est un s.e.v. de E ; que F et G sont deux s.e.v. de H ; et que $F \oplus G = H$.

- F est non vide, et stable pour les deux opérations : c'est donc un s.e.v. de E ; si u appartient à F, alors u est convergente vers 0, donc appartient à H.
- De même, G est non vide, et stable pour les deux opérations : c'est donc un s.e.v. de E ; si u appartient à G, alors u est constante, donc appartient à H.
- Ainsi $F + G \subset H$; réciproquement, si $u \in H$, alors $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$: donc $u \in F + G$.
- Par ailleurs, la somme $F + G$ est directe : en effet, si $u \in F \cap G$, alors, d'une part u converge vers 0, d'autre part la valeur de u est constante : donc u est la suite nulle. Ainsi $F \oplus G = H$.
