▶ Les exercices de cette feuille portent sur opérations entre les sous-espaces vectoriels.

**Opérations sur les sous-espaces**

Q1 $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque. $F$ et $G$ sont deux s.e.v. de $E$, tous deux distincts de $E$. Prouvez que $F\cup G$ est strictement contenu dans $E$ ; et que c'est un s.e.v. de $E$ ssi $F\subset G$ ou $G\subset F$.

▶ Observons que, si $F\subset G$, alors $F\cup G=G$ est distinct de $E$ ; même conclusion si $G\subset F$.

▶ Sinon, soient $x\in F-G$ et $y\in G-F$. Alors $x+y\notin F\cup G$ ; en effet, si $x+y\in F\cup G$, alors $x+y-x=y\in F$, ce qui est exclus ; et $x+y\in G$ implique $x+y-y=x\in G$, ce qui est également exclus. Donc $F\cup G$ est strictement contenu dans $E$, pour tous les autres cas.

▶ Pour la réciproque, supposons que $F\cup G$ est un s.e.v. de $E$. Si l'on n'avait, ni $F\subset G$, ni $G\subset F$, on pourrait trouver $x\in F-G$ et $y\in G-F$. Alors $x\in F$ et $y\in G$, donc $x+y\in F\cup G$. Or $x+y\in F$ implique $x+y-x=y\in G$, ce qui est exclus ; de la même manière, $x+y\in G$ implique $x+y-y=x\in G$, ce qui est également exclus. Concluons : nécessairement, l'une des deux inclusions $F\subset G$ ou $G\subset F$ doit être vraie.

Q2 $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque. $F$, $G$ et $H$ sont trois s.e.v. de $E$. Étudiez l'égalité $(F+G)\cap H=(F\cap H)+(G+H)$ ; puis étudiez l'égalité $\big(F+(G\cap H)\big)\cap H=(F\cap H)+(G\cap H)$.

▶ L'inclusion $(F+G)\cap H\subset(F\cap H)\cup(G\cap H)$ est fausse, comme le montre l'exemple suivant : $E=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$, $G=i\mathbb{R}$, $H=(1+i)\mathbb{R}$. Nous avons $F+G=\mathbb{C}$, donc $(F+G)\cap H=(1+i)\mathbb{R}$ ; mais $F\cap H=G\cap H=\{\overrightarrow{0}\}$ donc $(F\cap H)+(G\cap H)=\{\overrightarrow{0}\}$. Ainsi, $u\in\big(F+(G\cap H)\big)\cap H$.

▶ L'inclusion inverse est vraie : en effet, soit $u\in(F\cap H)+(G\cap H)$ ; il existe $v\in F\cap H$ et $w\in G\cap H$ tels que $u=v+w$. Alors $v\in H$ et $w\in H$, donc $u=v+w\in H$. Par ailleurs, $v\in F$ et $w\in G$ donc $u=v+w\in F+G$ ; finalement, $u\in(F+G)\cap H$. Ainsi, $u\in\big(F+(G\cap H)\big)\cap H$.

▶ La deuxième égalité est vraie. En effet, soit $u\in\big(F+(G\cap H)\big)\cap H$ ; $u\in H$ et $u\in F+(G\cap H)$ donc il existe $v\in F$ et $w\in G$ tels que $u=v+w$. Alors $v=u-w\in H$ car $u\in H$ et $u\in F+(G\cap H)$. Donc $v\in F\cap H$ et $w\in G\cap H$ ; par suite, $u=v+w\in(F\cap H)+(G\cap H)$. Ainsi, $u\in\big(F+(G\cap H)\big)\cap H$.

▶ Réciproquement, soit $u\in(F\cap H)+(G\cap H)$. Il existe $v\in F\cap H$ et $w\in G\cap H$ tels que $u=v+w$ ; mais $v\in H$ et $w\in H$, donc $u\in H$. Par ailleurs, $v\in F$ et $w\in G\cap H$ donc $u=v+w\in F+(G\cap H)$. Ainsi, $u\in\big(F+(G\cap H)\big)\cap H$.

---

Q3 $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque. $F$, $G$ et $H$ sont trois s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. $E$, vérifiant $F\cap G=F\cap H$, $F+G=F+H$ et $G\subset H$. Prouvez que $G=H$. Montrez que chacune des trois hypothèses est nécessaire.

▶ Nous devons prouver $H\subset G$. Soit $x\in H : H\subset F+H$, donc $x\in F+G$ ; il existe donc $u\in F$ et $v\in G$ tels que $x=u+v$. Alors $w=x-v\in H$ car $x\in H$ et $v\in G\subset H$. Ainsi, $u\in F\cap H$, donc $u\in F\cap G$, et à plus forte raison $u\in G$. Comme $v\in G$, il vient $x=u+v\in G$.

▶ **Il reste à prouver la nécessité des hypothèses !**

---

Q4 $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque. $F$, $G$ et $H$ sont trois s.e.v. de $E$. Prouvez que $F+(G\cap H)\subset(F+G)\cap(F+H)$. Prouvez que, si $F\subset G$, alors $(F+G)\cap(F+H)=F+(G\cap H)$. Donnez un exemple où l'inclusion $F+(G\cap H)\subset(F+G)\cap(F+H)$ est stricte.

▶ Si $x\in F+(G\cap H)$, alors il existe $u\in F$ et $v\in G\cap H$ tels que $x=u+v$. Donc $x\in F+G$ et $x\in F+H$, si bien que $x\in(F+G)\cap(F+H)$.

▶ **À VOIR !** Supposons $F\subset G$. Soit $x\in(F+G)\cap(F+H)$ : alors $x\in F+G$, donc il existe $u\in F$ et $v\in G$ tels que $x=u+v$ ; de même, $x\in F+H$, donc il existe $s\in F$ et $t\in H$ tels que $x=s+t$. Ainsi, $x\in F\cap(G+H)$.

▶ $E=\mathbb{R}^3$ ; $F=\mathbb{R}e_1$, $G=\mathbb{R}e_2$ et $H=\mathbb{R}e_3$. Nous aurons $F+(G\cap H)=\mathbb{R}e_1+(\mathbb{R}e_2\cap\mathbb{R}e_3)=\mathbb{R}e_1$ ; par ailleurs, $(F+G)\cap(F+H)=(\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2)\cap(\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_3)=\mathbb{R}e_1$.

---