

- Les exercices de cette feuille portent sur opérations entre les sous-espaces vectoriels.

Opérations sur les sous-espaces

Q1 E est un \mathbb{K} -e.v. quelconque. F et G sont deux s.e.v. de E , tous deux distincts de E . Prouvez que $F \cup G$ est strictement contenu dans E ; et que c'est un s.e.v. de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

- Observons que, si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est distinct de E ; même conclusion si $G \subset F$.
- Sinon, soient $x \in F - G$ et $y \in G - F$. Alors $x + y \notin F \cup G$; en effet, si $x + y \in F \cup G$, alors $x + y - x = y \in F$, ce qui est exclu; et $x + y \in G$ implique $x + y - y = x \in G$, ce qui est également exclu. Donc $F \cup G$ est strictement contenu dans E , pour tous les autres cas.
- Pour la réciproque, supposons que $F \cup G$ est un s.e.v. de E . Si l'on n'avait, ni $F \subset G$, ni $G \subset F$, on pourrait trouver $x \in F - G$ et $y \in G - F$. Alors $x \in F$ et $y \in G$, donc $x + y \in F \cup G$. Or $x + y \in F$ implique $x + y - x = y \in G$, ce qui est exclu; de la même manière, $x + y \in G$ implique $x + y - y = x \in G$, ce qui est également exclu. Concluons : nécessairement, l'une des deux inclusions $F \subset G$ ou $G \subset F$ doit être vraie.

Q2 E est un \mathbb{K} -e.v. quelconque. F , G et H sont trois s.e.v. de E . Étudiez l'égalité $(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$; puis étudiez l'égalité $(F + (G \cap H)) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$.

- L'inclusion $(F + G) \cap H \subset (F \cap H) \cup (G \cap H)$ est fautive, comme le montre l'exemple suivant : $E = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$, $G = i\mathbb{R}$, $H = (1 + i)\mathbb{R}$. Nous avons $F + G = \mathbb{C}$, donc $(F + G) \cap H = (1 + i)\mathbb{R}$; mais $F \cap H = G \cap H = \{\vec{0}\}$ donc $(F \cap H) + (G \cap H) = \{\vec{0}\}$. Ainsi, $u \in (F + (G \cap H)) \cap H$.
- L'inclusion inverse est vraie : en effet, soit $u \in (F \cap H) + (G \cap H)$; il existe $v \in F \cap H$ et $w \in G \cap H$ tels que $u = v + w$. Alors $v \in H$ et $w \in H$, donc $u = v + w \in H$. Par ailleurs, $v \in F$ et $w \in G$ donc $u = v + w \in F + G$; finalement, $u \in (F + G) \cap H$. Ainsi, $u \in (F + (G \cap H)) \cap H$.
- La deuxième égalité est vraie. En effet, soit $u \in (F + (G \cap H)) \cap H$; $u \in H$ et $u \in F + (G \cap H)$ donc il existe $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$. Alors $v = u - w \in H$ car $u \in H$ et $w \in G \cap H$. Donc $v \in F \cap H$ et $w \in G \cap H$; par suite, $u = v + w \in (F \cap H) + (G \cap H)$. Ainsi, $u \in (F + (G \cap H)) \cap H$.
- Réciproquement, soit $u \in (F \cap H) + (G \cap H)$. Il existe $v \in F \cap H$ et $w \in G \cap H$ tels que $u = v + w$; mais $v \in H$ et $w \in H$, donc $u \in H$. Par ailleurs, $v \in F$ et $w \in G \cap H$ donc $u = v + w \in F + (G \cap H)$. Ainsi, $u \in (F + (G \cap H)) \cap H$.

Q3 E est un \mathbb{K} -e.v. quelconque. F , G et H sont trois s.e.v. d'un même \mathbb{K} -e.v. E , vérifiant $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Prouvez que $G = H$. Montrez que chacune des trois hypothèses est nécessaire.

- Nous devons prouver $H \subset G$. Soit $x \in H : H \subset F + H$, donc $x \in F + G$; il existe donc $u \in F$ et $v \in G$ tels que $x = u + v$. Alors $w = x - v \in H$ car $x \in H$ et $v \in G \subset H$. Ainsi, $u \in F \cap H$, donc $u \in F \cap G$, et à plus forte raison $u \in G$. Comme $v \in G$, il vient $x = u + v \in G$.
- **Il reste à prouver la nécessité des hypothèses !**

Q4 E est un \mathbb{K} -e.v. quelconque. F , G et H sont trois s.e.v. de E . Prouvez que $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$. Prouvez que, si $F \subset G$, alors $(F + G) \cap (F + H) = F + (G \cap H)$. Donnez un exemple où l'inclusion $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ est stricte.

- Si $x \in F + (G \cap H)$, alors il existe $u \in F$ et $v \in G \cap H$ tels que $x = u + v$. Donc $x \in F + G$ et $x \in F + H$, si bien que $x \in (F + G) \cap (F + H)$.
- **À VOIR !** Supposons $F \subset G$. Soit $x \in (F + G) \cap (F + H)$: alors $x \in F + G$, donc il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $x = u + v$; de même, $x \in F + H$, donc il existe $s \in F$ et $t \in H$ tels que $x = s + t$. Ainsi, $x \in F \cap (G + H)$.
- $E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathbb{R}e_1$, $G = \mathbb{R}e_2$ et $H = \mathbb{R}e_3$. Nous aurons $F + (G \cap H) = \mathbb{R}e_1 + (\mathbb{R}e_2 \cap \mathbb{R}e_3) = \mathbb{R}e_1$; par ailleurs, $(F + G) \cap (F + H) = (\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2) \cap (\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3) = \mathbb{R}e_1$.