► Les exercices de cette feuille portent sur les sous-espaces vectoriels.

Révisons la structure de $\mathbb{K}$-e.v.

► Munissons $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de deux opérations :
$+$ définie par $(a, b) + (c, d) = (ac, b + d)$
$\bullet$ définie par $\lambda \bullet (a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Q1 Vérifiez que ce sont bien des opérations, c'est-à-dire : les couples existent et appartiennent à E.

Q2 Vérifiez que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

Q3 Vérifiez que $\bullet$ possède les quatre propriétés supplémentaires requises pour que $(E, +, \bullet)$ soit un $\mathbb{R}$-e.v.

Sous-espaces ou pas ?

Q4 Montrez que l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels qui vérifient à la fois $2x - y - z = 0$ et $x + 2y - 3z = 0$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, puis montrez qu'il s'agit d'une droite vectorielle.

Q5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et G un s.e.v. de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. L'ensemble $H = \{f' \mid f \in G\}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$?

Q6 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et G un s.e.v. de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. L'ensemble $H = \{f \mid f' \in G\}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$?

Q7 Notons I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions croissantes est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$? Et l'ensemble des fonctions monotones ? Et l'ensemble des fonctions convexes ? Et l'ensemble des fonctions injectives ?

Q8 L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' + y^2 = 0$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$?

Q9 Notons $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-e.v. des suites de réels. L'ensemble des suites (u_n) de réels telles que la suite de terme général ${u_n}^2$ converge est-il un s.e.v. de $\mathcal{E}$?

Q10 L'ensemble des triplets (x, y, z) de réels qui vérifient à la fois $2x - y - z = 0$ et $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

Q11 L'ensemble des suites (u_n) de complexes qui vérifient $u_{n+1} = \overline{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-il un $\mathbb{R}$-e.v. ? un $\mathbb{C}$-e.v. ?

Q12 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est dite *périodique* s'il existe $p > 0$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des suites de réels périodiques est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?

Q13 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est dite *périodique APCR* s'il existe $n_0 \geqslant 0$ et $p > 0$ tels que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. L'ensemble des suites de réels périodiques APCR est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?

Opérations sur les sous-espaces

Q1 Soient F et G deux s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E, tous deux distincts de E. Prouvez que $F \cup G$ est strictement contenu dans E ; et que c'est uns.e.v. de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Q2 Trois s.e.v. F, G et H d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E vérifient $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Prouvez que $G = H$. Montrez que chacune des trois hypothèses est nécessaire.

Q3 Soient F, G et H trois s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E. (i) prouvez que $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$; (ii) prouvez que, si $F \subset G$, alors $(F + G) \cap (F + H) = F + (G \cap H)$; (iii) donnez un exemple où l'inclusion $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ est stricte.

Q4 F, G et H sont trois s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E. Étudiez les égalités :
(i) $(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$
(ii) $\big(F + (G \cap H)\big) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$