

► Les exercices de cette feuille portent sur les sous-espaces vectoriels.

Révisons la structure de \mathbb{K} -e.v.

- Munissons $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de deux opérations :
- + définie par $(a, b) + (c, d) = (ac, b + d)$
 - définie par $\lambda \bullet (a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

- Q1 Vérifiez que ce sont bien des opérations, c'est-à-dire : les couples existent et appartiennent à E .
- Q2 Vérifiez que $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- Q3 Vérifiez que \bullet possède les quatre propriétés supplémentaires requises pour que $(E, +, \bullet)$ soit un \mathbb{R} -e.v.

Sous-espaces ou pas ?

- Q4 Montrez que l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels qui vérifient à la fois $2x - y - z = 0$ et $x + 2y - 3z = 0$ est un s.e.v. de \mathbb{R}^3 , puis montrez qu'il s'agit d'une droite vectorielle.
- Q5 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et G un s.e.v. de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. L'ensemble $H = \{f' \mid f \in G\}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$?
- Q6 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et G un s.e.v. de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. L'ensemble $H = \{f \mid f' \in G\}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$?
- Q7 Notons I un intervalle de \mathbb{R} et $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -e.v. des fonctions de I dans \mathbb{R} . L'ensemble des fonctions croissantes est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$? Et l'ensemble des fonctions monotones ? Et l'ensemble des fonctions convexes ? Et l'ensemble des fonctions injectives ?
- Q8 L'ensemble des solutions sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $y' + y^2 = 0$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$?
- Q9 Notons \mathcal{E} le \mathbb{R} -e.v. des suites de réels. L'ensemble des suites (u_n) de réels telles que la suite de terme général u_n^2 converge est-il un s.e.v. de \mathcal{E} ?
- Q10 L'ensemble des triplets (x, y, z) de réels qui vérifient à la fois $2x - y - z = 0$ et $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ est-il un s.e.v. de \mathbb{R}^3 ?
- Q11 L'ensemble des suites (u_n) de complexes qui vérifient $u_{n+1} = \overline{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-il un \mathbb{R} -e.v. ? un \mathbb{C} -e.v. ?
- Q12 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est dite *périodique* s'il existe $p > 0$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des suites de réels périodiques est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?
- Q13 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est dite *périodique APCR* s'il existe $n_0 \geq 0$ et $p > 0$ tels que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \geq n_0$. L'ensemble des suites de réels périodiques APCR est-il un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?

Opérations sur les sous-espaces

- Q1 Soient F et G deux s.e.v. d'un même \mathbb{K} -e.v. E , tous deux distincts de E . Prouvez que $F \cup G$ est strictement contenu dans E ; et que c'est un s.e.v. de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- Q2 Trois s.e.v. F, G et H d'un même \mathbb{K} -e.v. E vérifient $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Prouvez que $G = H$. Montrez que chacune des trois hypothèses est nécessaire.
- Q3 Soient F, G et H trois s.e.v. d'un même \mathbb{K} -e.v. E . (i) prouvez que $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$; (ii) prouvez que, si $F \subset G$, alors $(F + G) \cap (F + H) = F + (G \cap H)$; (iii) donnez un exemple où l'inclusion $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ est stricte.
- Q4 F, G et H sont trois s.e.v. d'un même \mathbb{K} -e.v. E . Étudiez les égalités :
- (i) $(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$
 - (ii) $(F + (G \cap H)) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$