Sup PCSI 2 — Colles n° 29 et 30 — Quinzaine du 31/5 au 11/6

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Fonctions de plusieurs variables

• L'étude a porté essentiellement sur les fonctions « réelles de deux variables réelles », définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• Ouverts de $\mathbb{R}^2$: définition, exemples.

• Limite, limite directionnelle. Continuité.

• Dérivée directionnelle, dérivées partielles.

• Définition du développement limité à l'ordre 1 ; existence admise lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$. Définition du gradient.

▶• Extremums locaux : condition nécessaire d'existence.

2 Intégrales multiples

Pour $f \in \mathcal{C}\big([a,b]\times[c,d]),\mathbb{R}\big)$, on admet :

$$\int_{x=a}^{x=b}\Big(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_{y=c}^{y=d}\Big(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

La valeur commune est alors notée $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$.

Extension à $\displaystyle\iint_K f(x,y)\,dx\,dy$, où $K = \big\{(x,y)\,:\; a \leqslant x \leqslant b \text{ \underline{et} } g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\big\}$.

Interprétation : si $f \geqslant 0$, $\displaystyle\iint_K f(x,y)\,dx\,dy$ est le volume de $\big\{(x,y,z)\,:\; (x,y)\in K \text{ \underline{et} } 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\big\}$.

Linéarité de l'intégrale double, positivité, additivité vis-à-vis du domaine d'intégration sont admises.

▶Changements de variables : seul le passage en coordonnées polaires a été vu.

▶Intégrales triples : extension des définitions précédentes. Changements de variables : seuls ont été vus les passages en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques ; pour ce dernier, θ désigne la longitude et φ la colatitude.

▶Applications : détermination du centre de gravité d'une plaque homogène, d'un solide homogène ; calcul du moment d'inertie d'un solide homogène par rapport à un axe.

Les étudiantes et les étudiants de la PCSI2 (et leur professeur de mathématiques) remercient les interrogatrices et les interrogateurs pour leur travail efficace de préparation à l'oral, et leur souhaitent d'excellentes vacances.