Sup PCSI 2 — Colle n° 13 et 14 — Quinzaine du 10/1 au 21/1

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Limites et continuité

• Définition de la continuité ; exemples, contre-exemples.

• Caractérisation séquentielle de la continuité.

• Prolongement par continuité.

• Fonctions continues sur un intervalle I ; notation $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$; opérations dans cet ensemble ; composition de fonctions continues.

• Définition de la limite en $a \in I$ d'une application $f : I \mapsto \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. La limite est nécessairement égale à $f(a)$.

• Caractérisation séquentielle de la limite.

• Opérations sur les limites.

• Passage à la limite dans les inégalités.

• Extensions : limite à droite, limite à gauche ; limite en $\pm\infty$; limite en $a \in \overline{I}$; $\lim_a f = \pm\infty$.

• Relations de comparaisons ; règles de comparaison usuelles ; équivalents usuels.

▶ Calculs de limites, d'équivalents ; détermination de développements asymptotiques simples.

• Théorème des valeurs intermédiaires (preuve non exigible). L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

• Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (preuve non exigible).

2 Dérivées

• Définitions équivalentes de la dérivée en $a \in I$ de $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$: avec la limite du taux d'acroissement, avec le $DL_1(a)$ (la notion de DL n'est pas à ce programme).

• La dérivabilité de f en a implique la continuité de f en a. La réciproque est fausse.

• Fonction dérivée ; dérivées successives.

• Dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables. Formule de Leibniz.

• Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.

• Condition pour que f^{-1} soit dérivable, expression de $\left(f^{-1}\right)'$.

• Théorème de Rolle ; nécessité de chaque hypothèse.

• Théorème des accroissements finis ; inégalité des accroissements finis.

• Théorème dit *de la limite de la dérivée*.

• Lien entre sens de variation de f et signe de f' ; en particulier, CNS pour que $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ soit strictement monotone sur I.

• Une fonction f dérivable est k-lipschitzienne ssi f' est bornée par k.

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !