Sup PCSI 2 — Colle n° 5 et 6 — Quinzaine du 14/10 au 8/11

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Dérivées successives

• Les notions de fonction dérivable et de dérivée ont été définies sans recours à la notion de limite : on a simplement énuméré une famille de fonctions dérivables « de base », explicité leurs dérivées respectives, et donné des règles de dérivation (somme, produit, quotient, composée).

• Définition des dérivées successives, notation $f^{(n)}$; par définition, $f^{(n+1)}$ est la dérivée n-ième de f'. Démonstration des formules $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ et $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$. Fonctions de classe $\mathcal{D}^n$, $\mathcal{D}^\infty$ sur un intervalle I ; exemples.

• Somme, produit (formule de Leibniz), quotient, composition de fonctions de classe $\mathcal{D}^n$ ou de classe $\mathcal{D}^\infty$: énoncé et démonstration des théorèmes.

▶ Exemples de calcul explicite de la dérivée n-ième d'une fonction, utilisant éventuellement la formule de Leibniz. Ont été vus en classe les calculs de $\dfrac{d^k}{dx^k}(x^n)$, $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{d^n}{dx^n}(\sqrt{x})$.

2 Intégration

• La notion de fonction continue a été définie sans recours à la notion de limite : on a simplement énuméré une famille de fonctions continues « de base », et donné des règles permettant de prouver qu'une fonction est continue (somme, produit, quotient, composée).

• Les fonctions dérivables sont continues. Notations $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

• Définition des primitives d'une fonction sur un intervalle I. On admet que toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur cet intervalle. On montre que la différence entre deux primitives de f sur I est constante.

L'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction continue f est définie comme la variation sur $[a,b]$ d'une primitive de f sur cet intervalle ; cette variation ne dépend pas de la primitive choisie.

• L'intégrale ainsi définie est linéaire et positive.

• Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^+)$ vérifie $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f = 0$ (sous réserve que $a < b$).

• Inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$. Si $a < b$, on a l'égalité ssi f est de signe constant.

• Inégalité de Cauchy-Schwarz ; le cas d'égalité a été vu, et est exigible.

• Formule d'intégration par parties. Les étudiants doivent **IMPÉRATIVEMENT**, lors de son application, exhiber deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

• Formule de Taylor avec reste intégral.

▶ Calculs pratiques, en particulier : intégration par parties.

Sommes de Riemann : si $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, convergence de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

• Démonstration de ce résultat, dans le cas où f est monotone, et dans le cas où f est lipschitzienne.

▶ Applications à des calculs de limites.

• ▶ Changement de variable.

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !