Sup PCSI 2 — Colles n° 15 et 16 — Quinzaine du 22/1 au 2/2

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Groupes

• Définition d'un groupe ; exemples.

• Sous-groupes : définition, exemples. Intersection de deux sous-groupes.

• Morphismes de groupes, isomorphismes, automorphismes : définition, exemples.

• Noyau et image d'un morphisme de groupes ; ce sont des sous-groupes ; CNS pour qu'un morphisme soit injectif.

2 Anneaux et corps

• Anneaux : définition, exemples. Règles de calcul dans un anneau.

• Sous-anneaux. Morphismes d'anneaux. Morphisme canonique de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans un anneau A quelconque, notation $n \cdot a$.

• Formule de Bernoulli et formule du binôme pour deux éléments qui commutent.

• Corps : définition, exemples ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$). Sous-corps.

3 Algèbre linéaire

Définition d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$; exemples.

Espace vectoriel produit de deux $\mathbb{K}$-e.v.

Définition d'une $\mathbb{K}$-algèbre ; exemples.

Sous-espaces vectoriels : définition, exemples, caractérisation. Sev nul ; droites vectorielles.

• Intersection de sev.

• Somme de deux sev. Sous-espaces en somme directe. Sev supplémentaires, notation $E = F \oplus G$.

• Applications linéaires : définition, exemples, caractérisation. Vocabulaire : endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.

• Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des sev. Plus généralement, l'image directe et l'image réciproque d'un sev sont elles-mêmes des sev.

• $\mathcal{L}(E, F)$ a une structure de $\mathbb{K}$-e.v.

• Composée de deux applications linéaires ; $\mathcal{L}(E)$ a une structure de $\mathbb{K}$-algèbre.

• Bijection réciproque d'un isomorphisme ; $\mathcal{GL}(E)$ a une structure de groupe.

• Projecteurs : définition, $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont supplémentaires. Projections ; équivalence entre projections et projecteurs.

• Endomorphismes involutifs, symétries.

AC : 15 VJ : 39 MR : 56