$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2010/04}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

## Exercice 1

$\boxed{\text{Q1}}$ Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^7(t)\sin^3(t)\,dt$. Le résultat sera présenté sous la forme $\dfrac{p}{2^q}$ avec $p$ impair.

$\boxed{\text{Q2}}$ Calculez la limite de $f(x) = \left(\dfrac{\ln(x^4+3x+1)}{\ln(x^4-x^3+1)}\right)^{x\ln(x)}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $\alpha$ une solution de l'équation $z^3 - z^2 - z - 1 = 0$. Exprimez $\alpha^7$ en fonction de $\alpha$ et $\alpha^2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Donnez un équivalent *simple* de $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$ lorsque $n$ tend vers l'infini :

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $2\overline{z} = \left|1 - i - z\right|$ :

## Exercice 2

► Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Étudiez rapidement les variations de $f$.

► Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathcal{D}$ la tangente en $O$ à $\mathcal{C}_f$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminez une équation de $\mathcal{D}$, et précisez la place de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette droite.

► Nous nous intéressons maintenant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Justifiez la majoration $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

► Por $n \geqslant 1$, notons $H_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Établissez la majoration $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + H_n$.

$\boxed{\text{Q6}}$ En déduire un équivalent *simple* de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q7}}$ Calculez $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Donnez un équivalent *simple* de $F(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Tournez S.V.P.**

## Exercice 3

► Pour $n \geqslant 1$, notons $f_n : x \in [0, \pi] \mapsto x^n \sin(x)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Explicitez $f_n'(x)$ et montrez que $f_n'(x) > 0$ pour $0 < x \leqslant \pi/2$.

► Notons $g_n : x \in [\pi/2, \pi] \mapsto x^{1-n} f_n'(x)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez $g_n'(x)$ et montrez que $g_n'(x) < 0$ pour $\pi/2 < x \leqslant \pi$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déduisez des résultats précédents le tableau des variations de $f_n$, et prouvez l'existence de $a_n \in ]0, \pi[$ tel que $f_n$ soit strictement croissante sur $[0, a_n]$ et strictement décroissante sur $[a_n, \pi]$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Déterminez le signe de $g_{n+1}(a_n)$ ; quel est le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Prouvez que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

$\boxed{\text{Q6}}$ Déterminez la limite $\ell$ de la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Notons $x_n = \ell - a_n$. Donnez un équivalent *simple* de $x_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q8}}$ Quelle est la limite de $f_n(a_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini ?

► Pour $n \geqslant 1$, notons $J_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\, dx$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Calculez $J_1$ et $J_2$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Avec deux intégrations par parties successives, obtenez une relation exprimant $J_{n+2}$ en fonction de $J_n$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Utilisez cette relation pour déterminer les valeurs de $J_3$ et $J_4$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Quelle est la limite de la suite $(J_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque $n$ tend vers l'infini ?