Sup PCSI2 — Contrôle 2010/03

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Linéarisez l'expression $\cos^5(x)$.

Q2 Exprimez $z = \arctan(1) + \arctan(3) + \arctan(5)$ avec un seul arc tangente, et, au besoin, un multiple entier de π.

Q3 Donnez des expressions simples de $\cos\big(\arcsin(x)\big)$, $\cos\big(\arctan(x)\big)$ et $\tan\big(\arccos(x)\big)$.

Q4 Calculez les valeurs de $\tan(\pi/8)$ et $\tan(5\pi/8)$.

Exercice 2

► Notez bien que, dans cet exercice, ${u_n}^2$ désigne le carré de u_n, et non le terme d'indice n^2 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1 Montrez que la donnée de $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{u_n}$ définissent *effectivement* une suite de réels. Indication : raisonnez par récurrence !

Q2 Dressez un tableau donnant les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4. Vous présenterez les résultats sous forme de fractions irréductibles ; les calculs ne devront pas apparaître sur la copie.

Q3 Étudiez le sens de variation de cette suite.

Q4 Notre suite converge-t-elle ?

Q5 Calculez $\lim\limits_{n\to\infty} \big({u_{n+1}}^2 - {u_n}^2\big)$.

Exercice 3

► Pour $n \geqslant 1$, notons $s_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \dfrac{s_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = s_n - 2\sqrt{n}$.

Q1 Pour $n \geqslant 1$, prouvez l'inégalité $s_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on l'égalité ?

Q2 Prouvez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. *Remarque* : il existe au moins deux méthodes différentes.

Q3 En déduire la convergence de cette suite.

Q4 Établissez l'inégalité $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant s_n$ pour $n \geqslant 1$. *Remarque* : il existe au moins deux méthodes différentes.

Q5 Prouvez que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

Q6 Exhibez une suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ de réels telle que $\dfrac{s_n}{w_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, l'expression du terme général w_n étant *très simple*.

Tournez S.V.P.

Exercice 4

- Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Notons $M(f) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez la majoration $|I_n| \leqslant \dfrac{M(f)}{n+1}$. En déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

$\boxed{\text{Q2}}$ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, obtenez une autre majoration de I_n ; comparez cette majoration à la précédente.

$\boxed{\text{Q3}}$ Que pouvez-vous dire de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si f est à valeurs positives ou nulles ?

- Désormais, nous supposons $f(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$ pour tout $t \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Écrivez une relation *très simple* entre I_{n+3} et I_n.

Il est vivement conseillé de mener les calculs des questions suivantes avec le plus grand soin.

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminez des réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{t^3+1} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$ pour tout $t \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Calculez $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1}$ au moyen du changement de variable $u = t - \dfrac{1}{2}$. Le résultat sera écrit sous la forme la plus simple possible.

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire la valeur de I_0 ; le résultat fait intervenir $\ln(2)$, π et $\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Déduisez des résultats de Q4 et Q8 la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{3k+1}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Donnez des commandes Maple permettant de calculer I_0 et S_n.

Consignes de rédaction et de présentation

- Mettez votre nom sur chaque copie. Rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). N'utilisez ni encre rouge, ni crayon. Encadrez les résultats. Numérotez les copies de $1/n$ à n/n (où n est le nombre de copies). Traitez les questions dans l'ordre de l'énoncé, et indiquez les numéros des questions. Séparez nettement les réponses à deux questions consécutives (en sautant au moins une ligne). L'usage d'une calculatrice est interdit.
- Ne pas respecter la totalité de ces consignes a une conséquence très simple : la copie ne sera pas corrigée, et la note attribuée sera 0.
- Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement.

- Citation débile, trouvée dans un article sur la Bulgarie, dans le quotidien Le Monde des 27/28 octobre 1996 : « *Le lev (la monnaie nationale) a été dévalué de 250 % en un an* ».