Sup PCSI2 — Contrôle 2010/01

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : VRAI ou FAUX ?

► Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE (preuve à l'appui) ou FAUSSE (contre-exemple à l'appui).

Q1 Le nombre i est égal à sa partie imaginaire.

Q2 Si la somme et le produit de deux complexes u et v sont des réels, alors u et v sont des réels.

Q3 Les racines carrées du complexe i sont $\sqrt{i}$ et $-\sqrt{i}$.

Q4 Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\exp\left(\dfrac{i\pi}{3}\right)$ et $\exp\left(\dfrac{-i\pi}{3}\right)$.

Q5 Si $e^z = -1$, alors $z = i\pi$.

Q6 Si le complexe u est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors $\overline{u}$ est l'autre solution.

Q7 Pour $n \geqslant 1$, la somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Exercice 2 : trigonométrie (en vrac)

Q1 Donnez les expressions de $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

Q2 Exprimez $\sin^5(x)$ en fonction de $\sin(x)$, $\sin(3x)$ et $\sin(5x)$.

Q3 Rappelez les valeurs de $\sin(\pi/6)$, $\sin(\pi/4)$ et $\sin(\pi/3)$. En déduire la valeur de $\sin(\pi/12)$ et de $\cos(\pi/12)$.

Q4 Calculez le module et l'argument du complexe $\dfrac{(-1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^5}$.

Q5 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)$. Résolvez l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Q6 Soit $g : z \in \mathbb{C} \mapsto z^3 - (1+8i)z^2 + (-7+17i)z + 30 - 10i$. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $g(z) = 0$ sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure. Source : Bac E, juin 1982, Papeete, Exercice 2.

Exercice 3 : sommations (sans frais)

► Pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, notons $S_n^p = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p$. On rappelle que $S_n^1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $S_n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Q1 En effectuant le changement d'indice $k' = n + 1 - k$ dans S_n^3, obtenez une expression simple de S_n^3.

Q2 Que se passe-t-il si l'on applique ce changement d'indice à S_n^4 ?

Q3 Notons $T_n^3 = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (2k-1)^3$ la somme des cubes des n premiers naturels impairs. Donnez une expression simple de T_n^3.

Exercice 3 : récurrence

► Nous nous proposons d'établir l'encadrement $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n} \leqslant \dfrac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q1 Vérifiez l'encadrement pour $n = 1$.

Q2 Démontrez l'encadrement pour $n = 2$ et $n = 3$. *Attention* : les arguments faisant appel à des « valeurs approchées » de $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt[3]{3}$ ne seront pas acceptés.

Q3 Montrez que, si l'encadrement est vrai au rang $n \geqslant 1$, alors il l'est aussi au rang $n+1$.

Q4 Concluez !