## Problème 1

Q1 Nous avons les conditions $t > 0$ et $\ln(t) \neq 0$ ; donc les intervalles maximaux sont $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Sur chacun de ces intervalles, l'équation homogène s'écrit $y'(t) + \dfrac{y(t)}{t\ln(t)} = 0$. Notons $\mathcal{I}$ l'un des intervalles considérés. Nous avons $a : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ ; une primitive de cette fonction est $A : t \mapsto \ln\big(\ln(t)\big)$. La solution générale de l'équation homogène est donc $t \in \mathcal{I} \mapsto \lambda \ln(t)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q2 La solution générale de l'équation complète est $t \in \mathcal{I} \mapsto \dfrac{t+\lambda}{\ln(t)}$.

## Problème 2

*Pour d'évidentes raisons de commodité, nous notons $\varphi$ la fonction qui, à $(x, y, z)$ associe $(X, Y, Z)$. Ceci ne dérangera personne !*

Q1 Observons que $\varphi : (x, y, z) \mapsto (-4x - y - 6z, 6x + 2y + 8z, x + 2z)$ part de $\mathbb{R}^3$ et arrive dans $\mathbb{R}^3$. De plus, elle est linéaire ; en effet, soient $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ et $\lambda$ des réels. Notons $X = x + \lambda x'$, $Y = y + \lambda y'$ et $Z = z + \lambda z'$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) + \lambda\varphi(x', y', z') &= (-4x - y - 6z, 6x + 2y + 8z, x + 2z) + \lambda(-4x' - y' - 6z', 6x' + 2y' + 8z', x' + 2z') \\ &= (-4X - Y - 6Z, 6X + 2Y + 8Z, X + 2Z)\end{aligned}$$

Nous constatons que l'expression de $\varphi(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ est la même que celle de $\varphi(X, Y, Z)$. Ceci établit la linéarité de $\varphi$.

Q2 Déterminons le noyau de $\varphi$ : $4x + y - 6z = 0$, $3x + y + 4z = 0$ et $x + 2z = 0$. Ceci nous donne $x = -2z$, puis $y = -6z - 4x = 2z$ et $y = -3x - 4z = 2z$. Un vecteur directeur du noyau est par exemple $\vec{v} = (2, -2, -1)$.

Q3 Nous avons $\vec{w}_1 = f(1, 0, 0) = (-4, 6, 1)$, $\vec{w}_2 = f(0, 1, 0) = (-1, 2, 0)$ et $\vec{w}_3 = f(0, 0, 1) = (3, -4, -1)$. Nous constatons que ces vecteurs sont liés, puisque $\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \overrightarrow{0}$. Une base de $\mathrm{im}(u)$ est constituée, par exemple, des vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$.

Q4 Nous avons remarqué que $\dim\big(\ker(\varphi)\big) = 1$, donc $u$ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q5 Un vecteur directeur de $\ker(u)$ est $\vec{v} = (2, -2, -1)$. Montrons que $\ker(\varphi) \subset \mathrm{im}(\varphi)$. Soient $\lambda$ et $\mu$ tels que $\lambda(1, -2, 0) + \mu(3, -4, -1) = (2, -2, -1)$ ; alors $\lambda + 3\mu = 2$, $-2\lambda - 4\mu = -2$ et $-\mu = -1$. Nous en déduisons $\mu = 1$, puis $\lambda = 2 - 3\mu = -1$ ; ainsi que $\lambda = 1 - 2\mu = -1$. Ainsi $\ker(\varphi) \subset \mathrm{im}(\varphi)$.

Q6 Supposons $f \circ g = \mathbf{0}$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ ; alors $(f \circ g)(x) = \overrightarrow{0}$, soit $f\big(g(x)\big)(x) = \overrightarrow{0}$. Soit $y \in \mathrm{im}(g)$ : il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = g(x)$. Alors $f\big(g(x)\big) = \overrightarrow{0}$, donc $f(y) = \overrightarrow{0}$, donc $y \in \ker(f)$. Ainsi $\mathrm{im}(g) \subset \ker(f)$.

Q7 Supposons $\mathrm{im}(g) \subset \ker(f)$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ ; alors $g(x) \in \mathrm{im}(g)$, donc $f\big(g(x)\big) = \overrightarrow{0}$. Donc $f \circ g = \mathbf{0}$.

Q8 Nous savons que $u : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ avec $X = -4x - y - 6z$, $Y = 6x + 2y + 8z$ et $Z = x + 2z$. Notons $(X', Y', Z') = \varphi(X, Y, Z)$ ; alors :

$$X' = -4X - Y - 6Z = -4(-4x - y - 6z) - (6x + 2y + 8z) - 6(x + 2z) = 4x + 2y + 4z = 2(2x + y + 2z)$$
$$Y' = 6X + 2Y + 8Z = 6(-4x - y - 6z) + 2(6x + 2y + 8z) + 8(x + 2z) = -4x - 2y - 4z = -2(2x + y + 2z)$$
$$Z' = X + 2Z = -4x - y - 6z + 2(x + 2z) = -2x - y - 2z = -(2x + y + 2z)$$

Ainsi, $\varphi^2(x, y, z) = (2, -2, -1)\mathbb{R}$. Donc le rang de $\mathrm{im}(u^2)$ est égal à 1. Par suite, $\varphi^2$ n'est pas la fonction nulle.

Q9 $\varphi^2(\vec{w}_1) = \varphi^2(x, y, z) \in (2, -2, -1)\mathbb{R}$. De même $\varphi^2(\vec{w}_2) \in (2, -2, -1)\mathbb{R}$.

Q10 La dimension de $\ker(\varphi)$ est égale à 1. Donc celle de $\ker(\varphi^2)$ est au plus égale à 2. Donc $\varphi^2$ n'est pas la fonction nulle.

Q11 La famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre ; en effet, si $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \overrightarrow{0}$, alors, en appliquant $u^2$, il vient $au(\vec{v}_1) = \overrightarrow{0}$, donc $a = 0$. Ensuite, il vient $b = 0$ et enfin $c = 0$. Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre ; comme elle est de dimension 3 dans un espace de dimension 3, c'est terminé !