HX4 — Devoir 2010/02

Rédigez au moins deux des trois exercices. Travail à rendre le jeudi 4 novembre 2010 sans faute.

Exercice 1 : d'après HEC 1989, Option Générale, Maths 2

► Une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $p_{n+4} = \dfrac{p_{n+3}+p_{n+2}+p_{n+1}+p_n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous lui associons les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$m_n = \min\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big) \qquad \text{et} \qquad M_n = \max\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q1 Prouvez que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Q2 Établissez $m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0$.

Q3 En déduire que les suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et que leurs limites respectives m et M vérifient $m \leqslant M$.

Q4 Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m_n}{4}$.

Q5 Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

Q6 Établissez la majoration $M_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

Q7 En déduire $m = M$.

Q8 Concluez, pour ce qui concerne la convergence et la limite de la suite de terme général p_n.

Exercice 2

Q1 Soit $n \geqslant 3$. Prouvez que l'équation $e^x = x^n$ possède, dans l'intervalle $]1, e[$, une et une seule solution, que nous noterons désormais u_n.

Q2 Prouvez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge.

Q3 Déterminez la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

Q4 Donnez un équivalent *simple* de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3

► Notons $f : t > 1 \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$.

Q1 Étudiez rapidement les variations de f, en précisant les limites aux bornes de son intervalle de définition.

► Pour $n \geqslant 3$, notons $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$. On rappelle que $e < 3$.

Q2 Prouvez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.

Q3 La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est-elle *strictement* croissante ?

Q4 Donnez un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Q5 Montrez que l'équation $f(x) = u_n$ possède, dans l'intervalle $[n, n+1]$, une et une seule solution, qui sera désormais notée x_n.

► Nous nous proposons d'étudier la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.

Q6 Cette suite est-elle monotone ?

Q7 Cette suite converge-t-elle ?

Q8 Donnez un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.