► Toute confusion entre la fonction f et l'expression $f(x)$ sera facturée **1** point. Sautez impérativement une ligne à la fin de chaque question, sous peine de perdre un autre point.

Exercice 1 : diverses questions d'analyse

► Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres. Les réponses non accompagnées d'une justification rigoureuse seront ignorées par le correcteur.

Q1 Donnez un équivalent simple de $\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(2x)\operatorname{sh}(3x)$ lorsqe x tend vers $+\infty$.

Q2 Donnez un équivalent simple de $\ln(x+2)\ln(2x)\ln(x^2)\ln(2^x)$ lorsqe x tend vers $+\infty$.

Q3 Exhibez une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, telle que, pour tout réel y, l'équation $f(x) = y$ possède une infinité de solutions.

Q4 Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \big(\tan^{2009}(x) + \tan^{2011}(x)\big)\, dx$.

► Pour les trois questions suivantes, n est un naturel non nul et f_n est la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{sh}(kx)$.

Q5 Donnez un équivalent simple de $f_n(x)$ lorsque x tend vers 0.

Q6 Donnez un équivalent simple de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q7 Explicitez le développement limité de f_n, à l'ordre 3, au voisinage de 0.

► Les questions suivantes ont été posées à l'oral des ENSTIM.

Q8 I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I, à valeurs réelles. La fonction f vérifie la curieuse propriété suivante : $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0$ quels que soient a et b appartenant à I. Que pouvez-vous dire de f ?

Q9 Explicitez le $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$.

Q10 Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$. Calculez un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0, suffisamment précis pour que l'on puisse en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

Q11 Montrez que $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \arctan(e^t)\, dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Explicitez $f'(x)$.

Q12 Étudiez la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - x\ln\big(|x|\big)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

► Notons $f : x \mapsto x^2 \ln(x+1)$.

Q13 Explicitez $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.

Q14 Donnez une formule pour la dérivée n-ième de f, lorsque $n \geqslant 3$.

Exercice 2 : un opérateur intégral

► $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{E}$. Justifiez *rigoureusement* l'existence de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ et son appartenance à $\mathcal{E}$.

► Cette fonction sera désormais notée $\Phi(f)$. Φ est donc une fonction de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soient $g : t \mapsto 1$ et $h : t \mapsto t$. Explicitez $\Phi(g)$ et $\Phi(h)$. Remarque : « expliciter $\Phi(g)$ » signifie « donner l'expression de $\big(\Phi(g)\big)(x)$, où $x \in \mathbb{R}$ ».

$\boxed{\text{Q3}}$ Explicitez de même $\Phi(\arctan)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Prouvez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Prouvez que Φ est injective.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $f \in \mathcal{E}$ et $F = \Phi(f)$. Combien vaut $F(0)$? Φ est-elle surjective ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $F(0) = 0$. Montrez qu'il existe un et un seul élément f de $\mathcal{E}$ tel que $\Phi(f) = F$. Vous expliciterez f en fonction de F.

► Nous dirons qu'un s.e.v. G de $\mathcal{E}$ est *stable* par Φ si $\Phi(G) \subset G$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Prouvez que le s.e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de $\mathcal{E}$ est stable par Φ.

► Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{E}$ bornés, autrement dit pour lesquels il existe un réel $M \geqslant 0$ (et dépendant de f) tel que $\big|f(x)\big| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que $\mathcal{B}$ est stable par Φ.