$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2008/05}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

► Pour chacune des affirmations présentées plus bas, dites si elle est VRAIE (preuve à l'appui) ou FAUSSE (contre-exemple à l'appui).

► Rappel : soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que f est *bornée* s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\left|f(x)\right| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.

► Un autre rappel : si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors f est bornée.

► Dans les quatre premières questions, a et b sont deux réels vérifiant $a < b$, et f est une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Si f est dérivable sur $[a, b]$, alors f est bornée.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si f est bornée, et si $f\big([a, b]\big) \subset [a, b]$, alors $f \circ f$ est bornée.

$\boxed{\text{Q3}}$ $\star$ Si $f\big([a, b]\big) \subset [a, b]$, et si $f \circ f$ est bornée, alors f est bornée.

$\boxed{\text{Q4}}$ $\star$ Si f est lipschitzienne sur $[a, b]$, alors f est bornée.

► Dans les deux questions suivantes, $\mathcal{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et g est une fonction de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si g est continue sur $\mathcal{I}$, alors g est bornée.

$\boxed{\text{Q6}}$ $\star$ Si $\exp \circ \mathrm{g}$ est bornée, alors g est bornée.

$\boxed{\text{Q7}}$ Dans cette question, $\mathcal{I} = \mathbb{R}_+^*$. Si $\ln \circ \mathrm{g}$ est bornée, alors g est bornée.

Exercice 2 : oral ENSTIM 2003

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la définition de la fonction arcsin.

► Notons $f : x \mapsto \arcsin\big(\exp(-x^2)\big)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quel est l'ensemble de définition de f ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Sur quel(s) intervalle(s) étudierez-vous f ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle est la limite de f en $+\infty$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Quel est le signe de $f(x)$?

$\boxed{\text{Q6}}$ Sans expliciter $f'(x)$, déterminez le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que f est dérivable sauf peut-être en 0.

$\boxed{\text{Q8}}$ Explicitez $f'(x)$ pour $x \neq 0$

$\boxed{\text{Q9}}$ f est-elle dérivable à droite de 0 ? Si oui, quelle est la valeur de $f'_d(0)$?

$\boxed{\text{Q10}}$ f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ entier ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► Pour $n \geqslant 1$, nous noterons $P_n : x \geqslant 0 \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Explicitez $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $P_n(1)$ est strictement négatif.

$\boxed{\text{Q3}}$ Pour $x \geqslant 0$, donnez une expression *très simple* de $P_n'(x)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelles sont les variations de P_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Retrouvez alors le résultat de la question 2.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $x \geqslant 0$, justifiez rapidement la relation $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\Big(\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1}\Big)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire $P_n(2) \geqslant 0$. Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que, dans l'intervalle $[1, +\infty[$, l'équation $P_n(x) = 0$ possède une et une seule solution, que nous noterons x_n. Suggestion : utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

$\boxed{\text{Q9}}$ Justifiez l'encadrement $1 < x_n \leqslant 2$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Pour $x \geqslant 0$, montrez que $P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt$.

$\boxed{\text{Q11}}$ En déduire la relation $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\, dt$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Pour $t \geqslant 1$, prouvez l'inégalité $t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$.

$\boxed{\text{Q13}}$ En déduire $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \geqslant \frac{n(x_n - 1)^2}{2}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Prouvez alors l'encadrement $0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2\ln(2)}}{n}$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Et maintenant concluez, pour ce qui concerne la convergence et la limite de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$!