Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (44ème Olympiade Mathématique Polonaise)

► Les relations $x_0 = 2008$ et $x_{n+1} = -\dfrac{2008}{n+1} \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} x_k$ définissent sans discussion possible une suite de réels.

Nous nous proposons de calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant 2008} 2^k x_k$. Pour alléger les écritures, notons $p = 2008$.

Q1 Écrivez une relation simple entre $(n+1)x_{n+1}$ et nx_n. En déduire l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

Q2 Au moyen d'un télescopage, donnez une expression simple de x_n pour $n \in [\![0,p]\!]$; vous ferez intervenir le coefficient binomial $\dbinom{p}{n}$.

Q3 Concluez !

Exercice 2 (Baltic Way 95 Mathematical Team Contest)

► Nous nous proposons d'établir la relation suivante :

$$\frac{1995}{2} - \frac{1994}{3} + \frac{1993}{4} - \cdots - \frac{2}{1995} + \frac{1}{1996} = \frac{1}{999} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{1995}{1996}$$

Notons $G(n) = \displaystyle\sum_{2 \leqslant k \leqslant 2n} \frac{(-1)^k(2n+1-k)}{k}$, $D(n) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{2k-1}{n+k}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$.

Q1 Donnez une expression simple de $D(n)$, faisant intervenir H_n et H_{2n}.

Q2 Exprimez $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de H_n et H_{2n}.

Q3 En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant 2n} \frac{(-1)^k}{k}$ faisant intervenir H_n et H_{2n}.

Q4 Donnez alors une expression simple de $G(n)$, faisant intervenir H_n et H_{2n}.

Q5 Concluez !

Q6 Question subsidiaire. Petit rappel :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

où γ désigne la constante d'Euler. Donnez un développement asymptotique de $D(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : autour de la fonction tan

► Nous nous intéressons à la fonction tan : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Quel est son ensemble de définition ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Cette fonction est-elle périodique ? Possède-t-elle une parité ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Rappelez les formules exprimant $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$. Aucune preuve n'est demandée.

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire les expressions de $\tan(2x)$ et $\tan(3x)$, en fonction de $\tan(x)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez (preuve à l'appui) deux expressions de $\tan'(x)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Donnez lex expressions de $\tan''(x)$ et $\tan'''(x)$, en fonction de $\tan(x)$ seul.

$\boxed{\text{Q7}}$ $\star$ Montrez que, pour tout entier n, il existe un polynôme P_n de degré $n+1$ tel que $\tan^{(n)}(x) = P_n\big(\tan(x)\big)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de tan. Indication : raisonnez par récurrence.

$\boxed{\text{Q8}}$ $\star$ Pour $x \in]0, \pi/2[$ et $n \in \mathbb{N}$, prouvez l'inégalité $\tan^{(n)}(x) > 0$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Calculez I_0 et I_1.

$\boxed{\text{Q10}}$ Quel est le sens de variation de la suite $\big(I_n\big)$?

$\boxed{\text{Q11}}$ Prouvez que la suite $\big(I_n\big)$ converge ; pouvez-vous, actuellement, préciser sa limite ?

$\boxed{\text{Q12}}$ Donnez un expression *très simple* de $I_{n+2} + I_n$.

$\boxed{\text{Q13}}$ En déduire la limite de la suite $\big(I_n\big)$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Explicitez I_{2p} sous forme d'une somme. Indication : utilisez la relation établie à la question 12 pour effectuer un télescopage.

$\boxed{\text{Q15}}$ Explicitez de même I_{2p+1} sous forme d'une somme.

$\boxed{\text{Q16}}$ Calculez $G_1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, puis $G_2 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.