

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

### Exercice 1 : QCM sur les suites

► Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres. Pour les questions à réponse OUI/NON, vous devez soit donner une preuve, soit exhiber un contre-exemple.

- Q1 Deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient respectivement  $u_n = o(n^2)$  et  $v_n = \mathcal{O}(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs  $x_n = u_n + v_n$  et  $y_n = u_n \cdot v_n$  ?
- Q2 Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels converge vers 1. La suite de terme général  $(u_n)^n$  converge-t-elle nécessairement ?
- Q3 Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $u_n = \mathcal{O}(\ln(n))$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. A-t-on nécessairement  $\exp(u_n) = \mathcal{O}(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
- Q4 Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $u_n = \mathcal{O}(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. A-t-on nécessairement  $\ln(u_n) = \mathcal{O}(\ln(n))$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
- Q5 Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^2$ . Pouvez-vous affirmer que cette suite est croissante APCR ?
- Q6 Une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2^n$ . Pouvez-vous affirmer que cette suite est croissante APCR ?
- Q7 Une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $w_n + w_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2n$ . A-t-on nécessairement  $w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$  ?
- Q8 \*\*\* Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels est décroissante, et vérifie  $x_n + x_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n}$ . Montrez que l'on a nécessairement  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

### Exercice 2 : une suite définie implicitement

► Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $f_n : x \geq 0 \mapsto x^{n+1} + x^n + 2x - 1$ .

- Q1 Montrez que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  possède dans  $\mathbb{R}_+$  une unique solution, que l'on notera  $x_n$ .
- Q2 Explicitez  $x_1$ .
- Q3 Prouvez l'inégalité  $x_n < \frac{1}{2}$ .
- Q4 Quel est le sens de variation de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  ?
- Q5 Montrez que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge. Que peut-on dire, pour l'instant, de sa limite  $\ell$  ?
- Q6 Déterminez la limite de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ .
- Q7 Saurez-vous trouver un équivalent *simple* de  $y_n = \ln(\ell - x_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

### Exercice 3 : une suite définie explicitement

► Pour  $n \geq 1$ , nous noterons  $a_n$  la  $n$ -ième décimale de  $\sqrt{2}$ , et  $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} 2^{-k} a_k$ . Vous pourrez utiliser

l'encadrement suivant de  $\sqrt{2}$  :

$$1.41421356237309504880 < \sqrt{2} < 1.41421356237309504881$$

Ainsi,  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 4$  et  $S_3 = 11/4$ .

- Q1 Calculez  $S_4$  et  $S_5$ . Vous donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles !
- Q2 Montrez que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  est croissante.
- Q3 La suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  est-elle strictement croissante ?
- Q4 Justifiez la majoration  $S_n < 9$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Q5 Prouvez la convergence de la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$ . Nous noterons désormais  $\ell$  sa limite.
- **Attention** : on ne demande pas de calculer  $\ell$  . . .
- Q6 En procédant comme à la question 4, établissez la majoration  $S_n < 55/16$ .
- Q7 Calculez  $S_8$ .
- Q8 Déduisez des deux résultats précédents la valeur de  $\lfloor \ell \rfloor$ .
- Q9 Montrez que  $a_n$  est le chiffre des unités de  $\lfloor \sqrt{2 \cdot 10^{2n}} \rfloor$ .
- Q10 Proposez un script Maple comportant deux fonctions : l'une pour calculer  $a_n$ , l'autre pour calculer  $S_n$ .