Sup PCSI2 — Contrôle 2008/02

Obligatoire : numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur **chaque** copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdit : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Vivement recommandé : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Exercice 1

▶ Cette première question est indépendante du reste.

Q1 Résolvez dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} x^{43}y^{31} = 4096 \\ x^{17}/y^5 = 4^{11} \end{cases}$

▶ Les questions suivantes sont liées.

Q2 Soient x et y appartenant à $]0,1[$. Établissez l'égalité $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

▶ Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Q3 Dressez un tableau donnant la valeur de S_n pour $1 \leqslant n \leqslant 4$. Chaque valeur sera présentée sous la forme $\arctan(p/q)$, où p/q est une fraction irréductible. Vous ne ferez pas apparaître les calculs sur votre copie.

Q4 Observez S_1, S_2 et S_3 (et, au besoin, S_4) et formulez une conjecture sur l'expression de S_n en fonction de n.

Q5 Démontrez votre conjecture, en raisonnant par récurrence.

Q6 En déduire la limite de la suite de terme général S_n.

Exercice 2

Q1 Énoncez la formule du binôme. Aucune preuve ne vous est demandée.

▶ Pour n et p appartenant à $\mathbb{N}$, notons $\mathrm{T}(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p \binom{n}{k}$.

Q2 Retrouvez rapidement la valeur de $\mathrm{T}(n,0)$.

Q3 Mettez en œuvre une méthode de votre choix pour évaluer $\mathrm{T}(n,1)$.

Q4 Mettez en œuvre une méthode de votre choix pour évaluer $\mathrm{T}(n,2)$.

▶ Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto (1+e^x)^n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{T}(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p \binom{n}{k}$.

Q5 Donnez l'expression développée de $f_n(x)$.

Q6 En évaluant $f_n(0)$, retrouvez la valeur de $\mathrm{T}(n,0)$.

Q7 En évaluant $f_n'(0)$, retrouvez la valeur de $\mathrm{T}(n,1)$.

Q8 Retrouvez de façon analogue la valeur de $\mathrm{T}(n,2)$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

- Notons $\varphi :\ t \in \mathbb{R} \mapsto 1 - 2t^2 + 3t^4$. Nous nous intéressons à la fonction $f :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}$. Nous noterons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
- Toute confusion entre la **fonction** f et l'**expression** $f(x)$ se traduira par une note nulle pour cet exercice.

$\boxed{\text{Q1}}$ Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{I}$ de f ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Quel est le signe de $f(x)$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que f est dérivable sur $\mathcal{I}$, et explicitez $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{I}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{I}$?

$\boxed{\text{Q5}}$ f possède-t-elle une parité ? Si oui, laquelle ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - 27x^4$.

- Notons $\mathcal{J}$ l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que φ est croissante sur $\mathcal{J}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire la majoration $f(x) \leqslant \dfrac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2 + 3x^4}}$ pour $x \in \mathcal{J}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

$\boxed{\text{Q10}}$ Dressez le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Donnez une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abcsisse 0.

$\boxed{\text{Q12}}$ Donnez l'allure de $\mathcal{C}_f$.