Sup PCSI2 — Contrôle 2007/09

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

▶ Les questions de cet exercice sont indépendantes. Le détail des calculs doit apparaître sur votre copie, ainsi que les justifications nécessaires s'il y a lieu.

Q1 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Q2 Combien vaut $\alpha = \arccos\Big(\sin\Big(\dfrac{369\pi}{17}\Big)\Big)$?

Q3 Combien vaut $\beta = \arctan\Big(\tan\Big(\dfrac{369\pi}{17}\Big)\Big)$?

Q4 Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big|1 + 2\sin(3t)\big|\, dt$.

Q5 Quelle est la limite de la suite de terme général $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin\Big(\dfrac{k\pi}{2n}\Big) \cos\Big(\dfrac{(k+1)\pi}{2n}\Big)$?

Exercice 2 (source : concours ESC 2001, option économique)

▶ Notons $f : x \in [0,1] \mapsto 2xe^x$.

Q1 Montrez que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle que vous préciserez.

▶ Notons désormais f^{-1} la bijection réciproque de f.

Q2 Dressez les tableaux de variation respectifs de f et f^{-1}.

Q3 f^{-1} est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

Q4 Montrez que l'équation $xe^x = 1$ possède, dans l'intervalle $[0,1]$, une et une seule solution, qui sera notée α dans la suite.

Q5 Montrez que les relations $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ définissent *effectivement* une suite de réels, qui appartiennent tous à l'intervalle $]0,1]$.

Q6 Pour $x \in [0,1]$, quel est le signe de $f(x) - x$?

Q7 Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.

Q8 Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et explicitez sa limite.

▶ Nous nous proposons, dans la suite, de déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k$.

Q9 Pour $n \in \mathbb{N}$, établissez la relation $2^n u_n = \exp(-S_n)$.

Q10 Utilisez cette relation pour obtenir un majorant simple de S_n.

Q11 Montrez alors la convergence de la suite de terme général S_n. Notons désormais $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$.

Q12 Justifiez l'encadrement $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.

Q13 Donnez un équivalent *simple* de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la définition d'un produit scalaire φ sur un $\mathbb{R}$-e.v. E.

$\boxed{\text{Q2}}$ Rappelez la définition d'un espace euclidien.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soient (E, φ) un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base de E. Rappelez la définition de la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'amplitude non nulle et $f \in \mathcal{D}^2(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ telle que f'' soit la fonction nulle. Que pouvez-vous dire de f ?

► Notons $\mathrm{E} = \mathcal{C}^2\big([-1,1], \mathbb{R}\big)$. Définissons :

$$\varphi : \ (f,g) \in \mathrm{E}^2 \mapsto f(-1) \times g(-1) + f(1) \times g(1) + \int_{-1}^{1} f''(t) g''(t)\, dt$$

Remarque (pas forcément inutile) : dans cette définition, $\times$ désigne la multiplication de deux réels.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que φ est un produit scalaire sur E.

► Soit $f \in \mathrm{E}$; nous noterons $\|f\|$ la norme de f, définie par $\|f\| = \sqrt{\varphi(f,f)}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Que pouvez-vous dire de $\varphi(f,g)$ si f est paire et g impaire ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Notons $\omega : \ t \in [-1,1] \mapsto -t$ et $\Phi : \ f \in \mathrm{E} \mapsto f \circ \omega$. Montrez que Φ est un endomorphisme orthogonal de E.

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $f_n : \ t \in [-1,1] \mapsto t^n$. Calculez $\|f_n\|$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Énoncez et démontrez la formule permettant de transformer le produit $\sin(a)\sin(b)$ en une somme.

► Pour $j \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $h_j : \ t \in [-1,1] \mapsto \sin(2j\pi t)$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Calculez $\varphi(h_j, h_k)$ pour j et k naturels non nuls. Vous distinguerez deux cas de figure selon que j et k sont égaux ou non.

► Notons $\mathrm{F} = \mathbb{R}_3[X]$; en identifiant polynômes et fonctions polynômes, F est un s.e.v. de E. Muni du produit scalaire induit par φ, F est un espace euclidien. Notons $\mathcal{B} = (\mathbf{1}, X, X^2, X^3)$ la base canonique de F.

$\boxed{\text{Q11}}$ Explicitez la matrice $\mathbf{M}$ de φ dans $\mathcal{B}$; compte tenu du contexte, vous indexerez ses lignes et ses colonnes à partir de 0. Indication : la somme des coefficients de M est égale à 48.

► Notons $\mathcal{P}$ le plan engendré par $\mathbf{1}$ et X (c'est-à-dire par les fonctions $t \in [-1,1] \mapsto 1$ et $t \in [-1,1] \mapsto t$) et Π la projection orthogonale de E sur $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soient $q : \ t \in [-1,1] \mapsto \cos(\pi t)$ et $r = \Pi(q)$. Explicitez $r(t)$, pour $t \in [-1,1]$.