Exercice 1 (d'après une épreuve du concours ENSTIM 1997)

► Notons $\mathbf{E} = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{E}$.

► Nous utiliserons aussi les vecteurs $f_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ et $f_4 = e_2 - e_4$.

► Notons s l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathbf{S} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Q1}}$ Notons $\mathbf{F} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Montrez que tout vecteur de $\mathbf{F}$ est invariant par $\mathbf{s}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Notons $\mathbf{G} = \mathrm{Vect}(f_3, f_4)$. Montrez que tout vecteur de $\mathbf{G}$ est transformés par $\mathbf{s}$ en son opposé.

$\boxed{\text{Q3}}$ Énoncez (sans démonstration) la relation de Grassmann.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $\mathbf{s}$ est la symétrie de base $\mathbf{F}$ et de direction $\mathbf{G}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminez *sans aucun calcul* la matrice $\mathbf{S}^{-1}$.

► Notons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$, où $e'_i = \mathbf{s}(e_i)$ pour $i \in [\![1,4]\!]$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez *sans aucun calcul* que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{E}$.

► Soient a et b deux réels. Notons $\mathbf{u}_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathbf{D}(a,b) = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q7}}$ Donnez une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que la matrice $\mathbf{D}(a,b)$ soit inversible.

$\boxed{\text{Q8}}$ Nous supposons que $\mathbf{D}(a,b)$ est inversible. Explicitez sa matrice inverse ; vous donnerez une expression de $\big(\mathbf{D}(a,b)\big)^{-1}$ en fonction de a, b et $\mathbf{D}(a,-b)$.

► Notons $\mathbf{M}(a,b)$ la matrice de $\mathbf{u}_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez, calculs à l'appui, que : $\mathbf{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

► Notons $\mathbf{L}$ l'ensemble des matrices $\mathbf{M}(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que $\mathbf{L}$ est stable pour le produit matriciel.

$\boxed{\text{Q11}}$ Supposons $\mathbf{M}(a,b)$ inversible. Calculer $\big(\mathbf{M}(a,b)\big)^{-1}$ et montrez que cette matrice appartient à $\mathbf{L}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soient t et u deux réels. Donnez, preuves à l'appui, les expressions de $\mathrm{ch}(t+u)$ et $\mathrm{sh}(t+u)$ en fonction de $\mathrm{ch}(t)$, $\mathrm{ch}(u)$, $\mathrm{sh}(t)$ et $\mathrm{sh}(u)$.

► Au réel t, nous associons la matrice $\mathbf{N}(t) = \mathbf{M}\big(\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t)\big)$. Notons $\mathbf{L}'$ l'ensemble des matrices $\mathbf{N}(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que $\mathbf{L}'$ est un sous-groupe commutatif du groupe $\mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$ des matrices réelles inversibles d'ordre 4.

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrez que la fonction $\mathbf{N}$ est un isomorphisme de groupes.

► Rappel : une matrice A réelle carrée d'ordre n est orthogonale si elle vérifie $A^T \times A = \mathbf{I}_n$, où A^T désigne la matrice transposée de A, et $\mathbf{I}_n$ la matrice identité d'ordre n. Notons $\mathcal{O}(4)$ l'ensemble des matrices réelles orthogonales d'ordre 4.

$\boxed{\text{Q15}}$ Déterminez $\mathcal{O}(4) \cap \mathbf{L}$.

Exercice 2

Partie I

- ▶ Il est vivement conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de s'attaquer à la résolution.
- ▶ Notons φ la fonction qui, à $P \in \mathbb{R}[X]$, associe $\varphi(P) = P(X+1) - X^2 P''(X-1)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez *en toute rigueur* le fait que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Donnez une expression *simple* du terme constant de $\varphi(P)$ en fonction de P.

$\boxed{\text{Q3}}$ L'équation $n^2 = n + 1$ possède-t-elle des solutions dans $\mathbb{N}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit P non nul, de degré n, de coefficient dominant α. Montrez que $\varphi(P)$ a même degré que P, et explicitez son coefficient dominant en fonction de α et de n ; au besoin vous distinguerez plusieurs cas de figure dans la discussion, mais cette dernière devra déboucher sur une formule *unique* valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Justifiez l'existence de $\boxed{\text{l'endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ induit par } \varphi}$. Vous le noterez désormais φ_n ; nous avons donc $\varphi_n(P) = \varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Partie II

- ▶ Notons $\mathcal{B}_3$ la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Calculez l'image par φ_3 de chacun des éléments de $\mathcal{B}_3$. En déduire la matrice $\mathbf{A}$ de φ_3 dans $\mathcal{B}_3$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Prouvez que φ_3 est bijectif.

$\boxed{\text{Q8}}$ Calculez la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ de $\mathbf{A}$. Les étapes du calcul devront figurer sur votre copie !

Partie III

$\boxed{\text{Q9}}$ Justifiez l'affirmation suivante : $\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Justifiez l'affirmation suivante : $\boxed{\varphi \text{ est injectif}}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Justifiez l'affirmation suivante : $\boxed{\varphi \text{ est surjectif}}$.

Partie IV

- ▶ Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons $\mathbf{A}$ la matrice de φ_n dans la base canonique $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$, nous ferons varier les indices de ligne et de colonne dans l'intervalle $[\![0,n]\!]$, pour plus de commodité.

$\boxed{\text{Q12}}$ Combien vaut $\mathbf{A}_{0,k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$?

$\boxed{\text{Q13}}$ Combien vaut $\mathbf{A}_{j,k}$ pour $0 \leqslant k < j \leqslant n$?

$\boxed{\text{Q14}}$ Combien vaut $\mathbf{A}_{1,k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$?

$\boxed{\text{Q15}}$ Combien vaut $\mathbf{A}_{2,k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$?

$\boxed{\text{Q16}}$ Combien vaut $\mathbf{A}_{k,k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$?

$\boxed{\text{Q17}}$ Calculez la trace de $\mathbf{A}$: $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{A}_{k,k}$.