Sup PCSI2 — Contrôle 2007/07

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (d'après ESTP 1995)

▶ $\mathcal{E}$ désigne le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. **H** désigne le $\mathbb{R}$-e.v.$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$. Soit $f \in \mathcal{E}$; nous lui associons $\mathcal{T}(f) \in \mathbf{H}$, définie par

$$\big(\mathcal{T}(f)\big)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}\,dt \qquad \text{pour tout } x > 0$$

Vous noterez soigneusement le rôle des parenthèses dans $\big(\mathcal{T}(f)\big)(x)$.

Q1 Dans le cadre de ce problème, la notation $\mathcal{T}\big(f(x)\big)$ a-t-elle un sens ?

Q2 Justifiez *brièvement* l'existence de $\mathcal{T}(f)$.

Q3 Montrez que $\mathcal{T}$ est une application linéaire.

▶ Dans les quatre questions suivantes, f désigne la fonction exponentielle : $f(t) = e^t$. Nous notons $F = \mathcal{T}(f)$.

Q4 Au moyen d'un changement de variable *très simple*, montrez que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q5 Simplifiez alors $G(x) = F(x) + F'(x)$ pour $x > 0$.

Q6 Rappelez le $DL_n(0)$ de la fonction $\varphi : u > -1 \mapsto \dfrac{1}{1+u}$.

Q7 Déterminez des constantes a, b et c telles que $G(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3} + o\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$.

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $f_n : t \in [0,1] \mapsto t^n$, et $\mathbf{J}_n = \mathcal{T}(f_n)$.

Q8 Calculez $\mathbf{J}_0(x)$ pour $x > 0$.

Q9 Écrivez une relation liant $\mathbf{J}_{n+1}(x)$ et $\mathbf{J}_n(x)$ pour $x > 0$. Indication : $t = (x+t) - x$.

Q10 En déduire $\mathbf{J}_n(x) = (-x)^n \ln\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big) + P_n(x)$, où P_n est une fonction polynôme que vous expliciterez.

Q11 Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n.

Q12 Que pouvez-vous dire de la famille $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$?

Tournez S.V.P.

Exercice 2 (d'après ESIGETEL 1995)

► Notons $p : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \sin(x)$, $q : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \cos(x)$, $r : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x \sin(x)$ et $s : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x \cos(x)$. Notons $\mathcal{E}$ le s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (p, q, r, s)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$.

► Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; notons $\mathbf{T}_\alpha$ la fonction qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\mathbf{T}_\alpha(f)$ définie par $\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x) = f(x + \alpha)$.

► Vous noterez soigneusement le rôle des parenthèses dans $\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ La notation $\mathbf{T}_\alpha\big(f(x)\big)$ a-t-elle un sens ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Exprimez $\mathbf{T}_\alpha(p)$, $\mathbf{T}_\alpha(q)$, $\mathbf{T}_\alpha(r)$ et $\mathbf{T}_\alpha(s)$ en fonction de p, q, r et s.

$\boxed{\text{Q4}}$ Justifiez l'affirmation suivante : $\mathbf{T}_\alpha$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Que pouvez-vous dire de $\mathbf{T}_\alpha \circ \mathbf{T}_\beta$? Que pouvez-vous dire alors de la fonction $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{T}_\alpha$?

$\boxed{\text{Q6}}$ Justifiez l'affirmation suivante : $\mathbf{T}_\alpha$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Explicitez la matrice M_α de $\mathbf{T}_\alpha$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Explicitez la matrice inverse de M_α.

► Notons $\mathbf{D}$ la fonction qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\mathbf{D}(f) = f'$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Exprimez $\mathbf{D}(p)$, $\mathbf{D}(q)$, $\mathbf{D}(r)$ et $\mathbf{D}(s)$ en fonction de p, q, r et s.

$\boxed{\text{Q10}}$ Justifiez : $\mathbf{D}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Explicitez la matrice Δ de $\mathbf{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Justifiez : $\mathbf{D}$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Calculez la matrice inverse de Δ.

Exercice 3 : projecteurs & symétries

► Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Nous notons **id** l'automorphisme identité de E. Une *symétrie* de E est un automorphisme involutif de E.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient s et t deux symétries de E. Montrez que $s \circ t$ est une symétrie de E ssi s et t commutent.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit s une symétrie de E autre que **id** ou $-$**id**. Existe-t-il des scalaires α et β tels que $\alpha s + \beta\,\mathbf{id}$ soit une symétrie de E ? Si oui, explicitez les couples (α, β) qui conviennent.

$\boxed{\text{Q3}}$ Exhibez des endomorphismes f et g de E tels que ni f, ni g, ni $f \circ g$ ne soient des symétries, mais tels que $f \circ g \circ f$ soit une symétrie.

$\boxed{\text{Q4}}$ Exhibez trois symétries s, t et u de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les contraintes suivantes : s, t et u sont deux à deux distinctes ; ni $s \circ t$, ni $t \circ u$, ni $u \circ s$ ne sont des symétries ; $s \circ t \circ u$ est une symétrie.