Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (oral ENSTIM 2003, MPSI)

Q1 Rappelez la définition de la fonction arcsin.

► Notons $f : x \mapsto \arcsin\big(\exp(-x^2)\big)$.

Q2 Quel est l'ensemble de définition de f ?

Q3 Sur quel(s) intervalle(s) étudierez-vous f ?

Q4 Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Q5 Quel est le signe de $f(x)$?

Q6 Sans expliciter $f'(x)$, déterminez le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

Q7 Montrez que f est dérivable sauf peut-être en 0.

Q8 Explicitez $f'(x)$ pour $x \neq 0$

Q9 f est-elle dérivable à droite de 0 ? Si oui, quelle est la valeur de $f'_d(0)$?

Q10 f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ entier ?

Q11 Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2 (ESC 1997)

► Pour $n \geqslant 1$, notons $J_n = \displaystyle\int_1^e t^2\big(\ln(t)\big)^n\,dt$.

Q1 Calculez J_1.

Q2 Quel est le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$?

Q3 Montrez que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; que pouvez-vous dire, pour l'instant, de sa limite ℓ ?

Q4 Pour $1 \leqslant x \leqslant e$, établissez la majoration $\ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$.

Q5 Déterminez alors la valeur de ℓ.

Q6 Pour $n \geqslant 1$, établissez une relation liant J_n et J_{n+1}.

Q7 Utilisez cette relation pour expliciter J_2 et J_3.

Q8 Que pouvez-vous dire de la suite de terme général nJ_n ?

Q9 Retrouvez alors le résultat de la question 5.

Q10 En utilisant la formule établie à la question 6, montrez l'existence de deux suites de rationnels $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $J_n = a_n e^3 + b_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Vous exprimerez a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

Q11 Donnez une expression simple de b_n.

Q12 Donnez une expression de a_n faisant intervenir des factorielles et des puissances de -3, et un seul symbole $\sum$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : un calcul de $\zeta(2)$ (ESSEC 2001)

► Nous nous proposons de déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbf{W}_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k^2}$.

► Pour $q \in \mathbb{N}$, nous noterons $\mathbf{J}_q = \int_0^{\pi/2} \cos^{2q}(t)\, dt$ et $\mathbf{I}_q = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2q}(t)\, dt$.

► **Toutes les intégrations par parties devront être soigneusement justifiées**.

Q1 Calculez $\mathbf{J}_0$ et $\mathbf{I}_0$.

Q2 Pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, établissez l'inégalité $t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin(t)$.

Q3 Pour $q \in \mathbb{N}$, établissez l'encadrement $0 \leqslant \mathbf{I}_q \leqslant \frac{\pi^2}{4}(\mathbf{J}_q - \mathbf{J}_{q+1})$.

Q4 Pour $q \in \mathbb{N}$, écrivez une relation entre $\mathbf{J}_{q+1}$ et $\mathbf{J}_q$.

Q5 Montrez que la suite de terme général $\frac{\mathbf{I}_q}{\mathbf{J}_q}$ converge vers 0.

Q6 Soit $q \in \mathbb{N}$. En effectuant deux intégrations par parties, exprimez $\mathbf{J}_{q+1}$ en fonction de $\mathbf{I}_{q+1}$ et $\mathbf{I}_q$.

Q7 Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrez la relation $\frac{\mathbf{I}_q}{\mathbf{J}_q} - \frac{\mathbf{I}_{q+1}}{\mathbf{J}_{q+1}} = \frac{1}{2(q+1)^2}$

Q8 Déterminez la limite de la suite de terme général $\mathbf{W}_n$.