Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

## Exercice 1 : étude d'une suite de réels (EDHEC 1999 option scientifique)

- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $g_n : x \geqslant n \mapsto \displaystyle\int_n^x \exp(t^2)\,dt$.

Q1 Montrez que $g_n$ est dérivable sur $[n, +\infty[$ et explicitez $g_n'(x)$.

Q2 Quel est le sens de variation de $g_n$ ?

Q3 Fixons $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de $g_n(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

Q4 Montrez que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'équation $g_n(x) = 1$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $[n, +\infty[$. Cette solution sera notée $x_n$ dans la suite.

Q5 Quelle est la limite de la suite de terme général $x_n$ ?

- Notons $u_n = x_n - n$.

Q6 ⋆ Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvez l'encadrement $\exp(-{x_n}^2) \leqslant u_n \leqslant \exp(-n^2)$.

Q7 Quelle est la limite de la suite de terme général $u_n$ ?

Q8 Quelle est la limite de la suite de terme général $nu_n$ ?

Q9 ⋆ En utilisant l'encadrement établi à la question 6, prouvez que $u_n$ est équivalent à $\exp(-n^2)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

## Exercice 2 : QCM sur les fonctions

- *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, preuve ou contre-exemple à l'appui !*
- Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$ entier.
- Si vous exhibez une fonction servant de contre-exemple, elle devra être définie sur $\mathbb{R}$ entier.
- Rappel : soit $k \geqslant 0$ ; $f$ est *$k$-lipschitzienne* si $\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant k|x - y|$, et ce quels que soient les réels $x$ et $y$. $f$ est *lipschitzienne* s'il existe un $k \geqslant 0$ tel que $f$ soit $k$-lipschitzienne.

Q1 Si $f$ et $fg$ sont bornées, alors la fonction $g$ est bornée.

Q2 ⋆ Si $f + g$ et $fg$ sont bornées, alors les fonctions $f$ et $g$ sont bornéee.

Q3 Si $f$ et $g$ sont strictement monotones, alors $f + g$ est strictement monotone.

Q4 Si $f$ et $g$ sont strictement monotones, alors $f \circ g$ est strictement monotone.

Q5 ⋆ Si $f$ est dérivable, et si $f'$ est bornée, alors $f$ est lipschitzienne.

Q6 Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Q7 ⋆⋆ Si $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ou $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (ou les deux).

**Tournez S.V.P.**

## Exercice 3 (HEC 2005, option LSH)

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour $t > 0$, démontrez l'inégalité $\ln(t) \leqslant t - 1$.

► Notons $f : t > 0 \mapsto \dfrac{1}{t - \ln(t)}$. La question précédente nous assure que $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $f(x)$ possède une limite $\alpha$ finie quand $x$ tend vers $0^+$.

► Nous considérerons désormais que $f$ a été prolongée par continuité à droite de 0, en posant $f(0) = \alpha$.

$\boxed{\text{Q3}}$ $f(x)$ possède-t-elle une limite (finie ou infinie) quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et explicitez $f'(x)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ $f$ est-elle dérivable à droite de 0 ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Étudiez rapidement les variations de $f$ et donnez l'allure de sa courbe représentative.

$\boxed{\text{Q7}}$ Pour $x > 0$, justifiez l'existence de l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

► Nous venons de définir une fonction $J$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que $J$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et explicitez $J'(x)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Dressez le tableau des variations de $J$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Pour $x > 0$, calculez $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que $t^{3/2}\Big(f(t) - \dfrac{1}{t}\Big)$ tend vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q12}}$ En déduire que $\displaystyle\int_x^{2x} \Big(f(t) - \frac{1}{t}\Big)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que $J(x)$ possède une limite $\lambda$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Déterminez la valeur de $\lambda$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrez que $J$ possède une limite $\ell$ à droite de 0.

► Nous prolongeons par continuité à droite de 0 la fonction $J$, en décidant que $J(0) = \ell$.

$\boxed{\text{Q15}}$ La fonction $J$ ainsi prolongée est-elle dérivable à droite de 0 ?

$\boxed{\text{Q16}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de $J$.