$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2007/04}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : questions à réponse OUI/NON

► *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, preuve ou contre-exemple à l'appui !*

► (u_n) et (v_n) sont des suites de réels.

$\boxed{\text{Q1}}$ Si la suite de terme général $\sin(u_n)$ converge, alors la suite de terme général $\cos(u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si la suite de terme général $\sin(u_n)$ converge, alors la suite de terme général $\cos^2(u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q3}}$ Si la suite de terme général $\sin(u_n)$ converge, alors la suite de terme général $\cos(2u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q4}}$ Si la suite de terme général $\cos(2u_n)$ converge, alors la suite de terme général $\sin(u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si la suite de terme général $\cos(2u_n)$ converge, alors la suite de terme général $\sin^2(u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q6}}$ Si les suites de termes généraux respectifs $\sin(u_n)$ et $\cos(u_n)$ convergent, alors la suite de terme général $\sin(2u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q7}}$ Si la suite de terme général $\sin(u_n) + \cos(u_n)$ converge, alors la suite de terme général $\sin(2u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q8}}$ Si la suite de terme général $\sin(u_n) - \cos(u_n)$ converge, alors la suite de terme général $\sin(2u_n)$ converge.

$\boxed{\text{Q9}}$ Si la suite de terme général $\exp(u_n) + \exp(-u_n)$ converge, alors la suite (u_n) converge.

$\boxed{\text{Q10}}$ Si la suite de terme général $\exp(u_n) - \exp(-u_n)$ converge, alors la suite (u_n) converge.

$\boxed{\text{Q11}}$ Si les suites de termes généraux respectifs $\sin(u_n)$ et $\exp(u_n)$ convergent, alors la suite (u_n) converge.

$\boxed{\text{Q12}}$ Si la suite de terme général $\exp(u_n) + \sin(u_n)$ est bornée, alors la suite (u_n) est bornée.

$\boxed{\text{Q13}}$ $\star\star\star$ Si la suite de terme général $\exp(u_n) - \exp(-2u_n)$ converge, alors la suite (u_n) converge.

Exercice 2 : une suite définie par une récurrence complète

► Les relations $c_0 = 1$ et $c_n = 2n - 1 + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} c_k$ définissent une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels.

$\boxed{\text{Q1}}$ Calculez c_n pour $n \in [\![1,5]\!]$; les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles. Vous vérifierez (pas sur la copie) que $c_6 = \frac{168}{5}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Simplifiez $u_n = (n+1)c_{n+1} - nc_n$, puis $v_n = \dfrac{c_{n+1}}{n+2} - \dfrac{c_n}{n+1}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminez des réels a et b tels que $\dfrac{4k+1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire une expression simple de c_n, faisant intervenir $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{1}{k}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Nous admettons que $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ où γ est la *constante d'Euler*. Donnez un développement asymptotique de c_n lorsque n tend vers l'infini.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : une suite définie implicitement

► Pour $n \geqslant 1$, notons $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède, dans $\mathbb{R}_+$, une et une seule solution, qui sera notée x_n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminez les valeurs de x_1 et x_2.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminez la valeur de x_4.

$\boxed{\text{Q4}}$ Exhibez un intervalle d'amplitude 1 qui contient *tous* les termes de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est monotone.

$\boxed{\text{Q6}}$ En déduire que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge. Pour l'instant, que pouvez-vous dire de sa limite ℓ ?

$\boxed{\text{Q7}}$ $\star$ Déterminez la valeur de ℓ.

$\boxed{\text{Q8}}$ Quelle est la limite de la suite de terme général $v_n = f_n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$?

$\boxed{\text{Q9}}$ $\star$ Donnez un équivalent simple de $1 + f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.