Sup PCSI2 — Contrôle 2007/03

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

► Pour $q \in \mathbb{N}^*$, notons $f_q : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+qt^4}$ et $I_q = \displaystyle\int_0^1 f_q(t)\,dt$.

► Pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_q(n) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{n^3}{n^4+qk^4}$.

Q1 Montrez que, pour $q \geqslant 1$ fixé, la suite de terme général $S_q(n)$ converge vers I_q.

Q2 Pour $q \geqslant 1$ et $t \in [0,1]$, déterminez le signe de $f_q(t) - f_{q+1}(t)$.

Q3 Quel est le sens de variation de la suite de terme général I_q ?

Q4 Montrez que la suite de terme général I_q converge, et donnez un encadrement de sa limite ℓ.

Q5 Montrez que la suite de terme général $J_q = \displaystyle\int_0^{1/q} \frac{dt}{1+qt^4}$ converge vers 0.

Q6 ⋆⋆ Quelle est la limite de la suite de terme général $K_q = \displaystyle\int_{1/q}^1 \frac{dt}{1+qt^4}$?

Q7 En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 2

Q1 Donnez, preuve à l'appui, les deux expressions de $\tan'(x)$, pour $|x| < \pi/2$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$.

Q2 Calculez I_0 et I_1.

Q3 Quel est le sens de variation de la suite $\big(I_n\big)$?

Q4 Prouvez que la suite $\big(I_n\big)$ converge ; pouvez-vous, actuellement, préciser sa limite ?

Q5 Donnez un expression *très simple* de $I_{n+2} + I_n$.

Q6 En déduire la limite de la suite $\big(I_n\big)$.

Q7 Explicitez I_{2p} sous forme d'une somme. Indication : utilisez la relation établie à la question 5 pour effectuer un télescopage.

Q8 Explicitez de même I_{2p+1} sous forme d'une somme.

Q9 Calculez $G_1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, puis $G_2 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

- Rappel : soient $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$; a est donc dérivable, et sa dérivée est continue. Nous pouvons alors parler de la fonction $G : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{b(x)} g(t)\,dt$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, et $G'(x) = b'(x) \times g\big(b(x)\big)$.

- Nous étudions la fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^6}}$. Sa courbe représentative sera notée $\mathcal{C}_F$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Sans calculer $F'(x)$, montrez que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Q2}}$ F possède-t-elle une parité ? Si oui, est-elle paire ou impaire ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est le sens de variation de F sur $\mathbb{R}^-$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Pour $x \geqslant 0$, prouvez la majoration $F(x) \leqslant x^2$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Avec la formule rappelée au début de cet exercice, explicitez $F'(x)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Il est clair que $\mathcal{C}_F$ passe par l'origine du repère ; quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_F$ en ce point ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Prouvez l'inégalité $F(1) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Pour $x \geqslant 1$, prouvez la majoration $F(x) \leqslant F(1) + \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{dt}{t^3}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ En déduire la majoration $F(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$, pour $x \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Q10}}$ La fonction F possède-t-elle une limite en $+\infty$?

$\boxed{\text{Q11}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de F.

$\boxed{\text{Q12}}$ Calculez $F''(x)$; vous donnerez l'expression de $F''(x)$ sous la forme $\dfrac{2P(x)}{(1+x^4+x^{12})^{3/2}}$, où P et un polynôme à coefficients entiers.

$\boxed{\text{Q13}}$ Prouvez rapidement que l'équation $P(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$. Cette solution sera notée α.

$\boxed{\text{Q14}}$ Donnez un encadrement de α. Remarque : la note attribuée pour cette question sera d'autant plus élevée que l'encadrement proposé (et justifié) sera serré.

$\boxed{\text{Q15}}$ Dressez le tableau des variations de F', puis donnez l'allure de la courbe représentative de F'.