Sup PCSI2 — Contrôle 2007/02

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : sommes et trigonométrie

Q1 Pour $n \geqslant 1$, donnez une expression *très simple* de $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} \exp\left(\frac{2ki\pi}{n}\right)$. Bien entendu, votre affirmation devra être prouvée rigoureusement.

► Pour $n \geqslant 2$, notons $S(n) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Q2 Dressez la liste des valeurs de $S(n)$ pour $n \in \{2,3,4,6\}$; vos calculs devront apparaître sur la copie. Quelle expression simple conjecturez-vous pour $S(n)$?

Q3 ⋆ Démontrez la formule que vous venez de conjecturer.

Q4 Pour $n \geqslant 1$, donnez une expression simple de $C(n) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 2 : récurrence (ou pas)

► Nous nous proposons d'établir l'inégalité $\displaystyle\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, de plusieurs façons différentes.

Q1 Donnez une preuve *directe*, fondée sur la manipulation des factorielles et des coefficients binomiaux.

Q2 Précisez le(s) cas où cette inégalité est stricte.

Q3 Donnez une autre preuve directe, fondée sur un argument combinatoire.

Q4 Comment démontreriez-vous cette inégalité par récurrence ? On ne vous demande pas de preuve détaillée.

► La question suivante est indépendante des précédentes.

Q5 ⋆ Prouvez, par récurrence, que l'inégalité $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 3 : autour de la fonction « arc sinus »

Q1 Rappelez la définition de la fonction arcsin.

► Notons $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

Q2 Quel est l'ensemble de définition de f ?

Q3 f possède-t-elle une parité ?

Q4 f est-elle monotone ?

Q5 f est-elle strictement monotone ?

Q6 f est-elle injective ?

Q7 Quelle relation *simple* existe-t-il entre $f(x)$ et $f(-x)$?

Q8 ⋆ Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

Tournez S.V.P.

Exercice 4 : simplification d'une somme

▶ Pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, notons $S_n^p = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p$. Rappel : $S_n^1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $S_n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Q1 Donnez une expression simple de S_n^3, preuve à l'appui !

Q2 Pour $n \geqslant 1$, notons $r_n = \dfrac{S_n^4}{S_n^2}$. Recopiez le tableau suivant, en le complétant. Vous réduirez au besoin les fractions, dans la dernière ligne. Les calculs ne doivent pas apparaître sur votre copie.

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9			
S_n^2	1	5	14			
n^4	1	16	81			
S_n^4	1	17	98			
r_n	1	17/5	7			

▶ Il semble intéressant d'étudier la suite de terme général $u_n = 5r_n$.

Q3 Donnez la valeur de u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, puis celle de $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

Q4 Quelle conjecture formulez-vous concernant la valeur de v_n ? Quelle serait alors l'expression de u_n ? Quelle serait alors l'expression de S_n^4 ?

Q5 $\star$ Au moyen d'un raisonnement par récurrence, établissez la validité de la formule conjecturée précédemment pour S_n^4.