Sup PCSI2 — Contrôle 2007/01

Obligatoires : numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Exercice 1

► Soit n un naturel ; nous dirons que n est un *carré parfait* s'il existe un naturel k tel que $n = k^2$. Nous dirons alors que k est la racine carrée de n. Par exemple, 289 est un carré parfait, et sa racine carrée est 17.

► Nous étudions la fonction f, définie sur $\mathbb{N}$ comme suit : si n est un carré parfait, alors $f(n)$ est la racine carrée de n ; sinon, $f(n) = n + 1$.

Q1 Dressez un tableau donnant la valeur de $f(n)$, pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.

Q2 f est-elle injective ?

Q3 f est-elle surjective ?

Q4 Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = x$?

► Soient p et q deux naturels ; nous noterons $p \to q$ lorsque $f(p) = q$. Nous dirons qu'une suite $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ de naturels est un *chemin* menant de n_0 à n_k si $f(n_{i-1} = n_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$; la longueur de ce chemin est k. Il est clair que, s'il existe un chemin menant de p à q et un chemin menant de q à r, alors il existe un chemin menant de p à r. Un *cycle* est un chemin de longueur non nulle menant de p à p.

Q5 Exhibez un cycle de longueur au moins 2.

Q6 ⋆⋆ Montrez que, pour tout naturel $p \geqslant 2$, il existe un chemin menant de p à 2.

Exercice 2

► Notons $\alpha = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$, $p = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $q = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

Q1 $p + q$ et pq sont tous deux des rationnels. Calculez leurs valeurs respectives.

Q2 En déduire les valeurs respectives de p et q.

Q3 Déterminez la valeur de $S = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

Q4 En déduire la valeur de $P = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

► Les autres questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres, ainsi que de ce qui précède. Elles doivent toutefois être rédigées sur la même copie (plusieurs copies, au besoin).

Q5 Soit β une solution de l'équation $z^3 - z^2 + 2z - 3 = 0$. Nous avons donc $\beta^3 = \beta^2 - 2\beta + 3$. Exprimez de même β^4, β^5 et β^6 en fonction de β et β^2 *uniquement*.

Q6 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2i\,\overline{z} + 1 = 0$. Notez bien qu'il ne s'agit pas d'une équation algébrique...

Exercice 3 (partie personnalisée)

▶ Pour les deux premières questions, vous donnerez une preuve complète des résultats proposés.

$\boxed{\text{Q1}}$ Transformez chacune des expressions suivantes en somme de sinus ou de cosinus :

$$P_1 = \sin(a)\sin(b) \qquad P_2 = \sin(a)\cos(b) \qquad P_3 = \cos(a)\cos(b)$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Transformez chacune des expressions suivantes en produit de sinus et/ou de cosinus :

$$S_1 = \sin(p) + \sin(q) \qquad S_2 = \sin(p) - \sin(q) \qquad S_3 = \cos(p) + \cos(q) \qquad S_4 = \cos(p) - \cos(q)$$

▶ Pour les questions suivantes, vous ferez apparaître les calculs menant au résultat proposé.

$\boxed{\text{Q3}}$ Mettez sous forme algébrique le complexe marqué en couleur :

$$P = \frac{2+3i}{4+3i} \times \frac{(1-2i)^3}{(3-i)^4} \qquad Q = \frac{4-3i}{2+3i} \times \frac{(1+2i)^3}{(1+i)^4} \qquad R = \frac{2-3i}{-4+i} \times \frac{(2-i)^4}{(1+2i)^3} \qquad S = \frac{4+5i}{2-3i} \times \frac{(1-2i)^3}{(2+i)^4}$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Mettez sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique, le complexes marqué en couleur :

$$A = \frac{(1-i)^{1982}}{(1-i\sqrt{3})^{994}} \qquad B = \frac{(1+i\sqrt{3})^{1000}}{(1+i)^{1996}} \qquad C = \frac{(-1+i)^{2007}}{(-1-i\sqrt{3})^{999}} \qquad D = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{1019}}{(-1-i)^{2046}}$$

Indication : l'argument de chacun de ces complexes est multiple de $\dfrac{\pi}{12}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation marquée en couleur, sachant qu'elle possède *au moins* une solution réelle :

␣ $z^3 + (5-i)z^2 + (-23-20i)z + (-115-75i) = 0$

␣ $z^3 + (-4+8i)z^2 + (-22-33i)z + (85-35i) = 0$

␣ $z^3 + (7+4i)z^2 + (15+16i)z + (9+12i) = 0$

␣ $z^3 + (2+7i)z^2 + (-28+24i)z + (-80-16i) = 0$

$\boxed{\text{Q6}}$ Calculez l'intégrale marquée en couleur :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3(t/2)\,dt \qquad J = \int_0^{\pi/4} \cos^3(4t)\,dt \qquad K = \int_0^{\pi/4} \sin^4(2t)\,dt \qquad L = \int_0^{\pi/3} \cos^3(2t)\,dt$$