## Problème 1

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\varphi_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ et $\mathbf{J}_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$.

Q1 Calculez $\mathbf{J}_0$ et $\mathbf{J}_1$.

Q2 Quel est le signe de $\mathbf{J}_n$ ?

Q3 Montrez que la suite de terme général $\mathbf{J}_n$ est monotone ; bien entendu, vous préciserez le sens de cette monotonie !

Q4 Qu'en déduisez-vous, concernant la suite de terme général $\mathbf{J}_n$ ?

Q5 Prouvez l'encadrement $0 \leqslant \mathbf{J}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Q6 Établissez la relation $2\mathbf{J}_{n+1} = 1 - (n+1)\mathbf{J}_n$.

Q7 En déduire la limite de la suite de terme général $n\mathbf{J}_n$.

Q8 Déterminez la limite de la suite de terme général $n(n\mathbf{J}_n - 1)$.

Q9 Déterminez des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\mathbf{J}_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

## Problème 2

► Notons $f : x > 0 \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

Q1 Montrez que $f$ possède une limite $\ell$ à droite de 0. Vous donnerez la valeur de cette limite.

► Nous considérons désormais que $f$ a été prolongée par continuité à droite de 0, en décidant que $f(0) = \ell$.

Q2 Montrez que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Q3 Explicitez $f'(x)$, pour $x > 0$.

Q4 Montrez que $f'$ possède une limite $\lambda$ à droite de 0. Vous donnerez la valeur de cette limite.

Q5 Montrez que $f(x)$ possède une limite quand $x$ tend vers $+\infty$.

Q6 Dressez le tableau des variations de $f$.

Q7 Donnez l'allure de la courbe représentative de $f$.

Q8 Explicitez $f''(x)$.

Q9 Montrez que $f$ est convexe.

Q10 Montrez que les relations $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent *effectivement* une suite de réels.

Q11 Montrez que l'équation $f(x) = x$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q12 Pour $x \geqslant 0$, prouvez la majoration $\big|f'(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Q13 Montrez que la suite de terme général $u_n$ converge ; vous préciserez sa limite.

Q14 ⋆⋆ Montrez que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$. Indication : raisonnez par récurrence, en appliquant la formule de Leibniz à la formule $x = (e^x - 1)f(x)$.