

Problème 1

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\varphi_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ et $\mathbf{J}_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$.

Q1 Calculez \mathbf{J}_0 et \mathbf{J}_1 .

Q2 Quel est le signe de \mathbf{J}_n ?

Q3 Montrez que la suite de terme général \mathbf{J}_n est monotone ; bien entendu, vous préciserez le sens de cette monotonie !

Q4 Qu'en déduisez-vous, concernant la suite de terme général \mathbf{J}_n ?

Q5 Prouvez l'encadrement $0 \leq \mathbf{J}_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Q6 Établissez la relation $2\mathbf{J}_{n+1} = 1 - (n+1)\mathbf{J}_n$.

Q7 En déduire la limite de la suite de terme général $n\mathbf{J}_n$.

Q8 Déterminez la limite de la suite de terme général $n(n\mathbf{J}_n - 1)$.

Q9 Déterminez des réels a , b et c tels que $\mathbf{J}_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Problème 2

► Notons $f : x > 0 \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

Q1 Montrez que f possède une limite ℓ à droite de 0. Vous donnerez la valeur de cette limite.

► Nous considérons désormais que f a été prolongée par continuité à droite de 0, en décidant que $f(0) = \ell$.

Q2 Montrez que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

Q3 Explicitez $f'(x)$, pour $x > 0$.

Q4 Montrez que f' possède une limite λ à droite de 0. Vous donnerez la valeur de cette limite.

Q5 Montrez que $f(x)$ possède une limite quand x tend vers $+\infty$.

Q6 Dressez le tableau des variations de f .

Q7 Donnez l'allure de la courbe représentative de f .

Q8 Explicitez $f''(x)$.

Q9 Montrez que f est convexe.

Q10 Montrez que les relations $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent *effectivement* une suite de réels.

Q11 Montrez que l'équation $f(x) = x$ possède une et une seule solution dans \mathbb{R}_+^* .

Q12 Pour $x \geq 0$, prouvez la majoration $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Q13 Montrez que la suite de terme général u_n converge ; vous préciserez sa limite.

Q14 ★★ Montrez que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty[$. Indication : raisonnez par récurrence, en appliquant la formule de LEIBNIZ à la formule $x = (e^x - 1)f(x)$.