Sup PCSI2 — Devoir 2007/04

▶ Notons $f : x > 0 \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Q1 Déterminez la limite de f en $+\infty$.

Q2 Montrez que f possède une limite ℓ à droite de 0.

▶ Nous considérons désormais que f a été prolongée par continuité en posant $f(0) = \ell$.

Q3 Explicitez $f'(x)$, pour $x > 0$.

▶ Notons $A : x \geqslant 0 \mapsto \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

Q4 Quelle relation simple existe-t-il entre $f'(x)$ et $A(x)$?

Q5 Montrez que f' possède une limite λ à droite de 0.

Q6 Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Q7 Explicitez $A'(x)$ et dressez le tableau des variations de A.

Q8 f est-elle monotone ? Est-elle strictement monotone ?

▶ Notons $B : x \geqslant 0 \mapsto -\dfrac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$.

Q9 f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$; donnez une relation simple liant $f''(x)$ et $B(x)$, pour $x > 0$.

Q10 Explicitez $B'(x)$ et dressez le tableau des variations de B.

Q11 Montrez que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Q12 Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

Q13 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, établissez la formule $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k t^k + \dfrac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$.

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, notons $J_n(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\, dt$.

Q14 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, établissez la formule $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{(-1)^{k+1} x^{k+1}}{k+1} + J_n(x)$.

Q15 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, prouvez la majoration $\left|J_n(x)\right| \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{n+2}$.

Q16 En déduire que, pour $x \in [0,1]$, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ converge, et explicitez sa limite.