Sup PCSI2 — Devoir 2007/03

► Notons $\mathcal{I} =]-1, +\infty[$ et $f : x \in \mathcal{I} \mapsto \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$.

Q1 Calculez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers -1^+.

Q2 Explicitez $f'(x)$.

Q3 Dressez le tableau des variations de f.

Q4 Montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions dans l'intervalle $\mathcal{I}$; nous les noterons a et b, avec $-1 < a < b$.

Q5 Utilisez une calculatrice pour obtenir une estimation numérique de b, puis donnez l'allure de la courbe représentative de f. Rappel : pas de crayon sur votre copie !

Q6 Montrez que l'équation $f(x) = x$ possède exactement une solution dans l'intervalle $\mathcal{I}$; nous la noterons c.

► Notons $\mathcal{K} = [0, 1]$. Nous nous intéressons à la suite des images de $u_0 \in \mathcal{K}$ par les itérées de f.

Q7 Montrez que $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathcal{K}$.

Q8 Montrez que $\mathcal{K}$ est stable par f, c'est-à-dire : si $x \in \mathcal{K}$, alors $f(x) \in \mathcal{K}$.

Q9 Montrez que la donnée de $u_0 \in \mathcal{K}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent **effectivement** une suite de réels, qui appartiennent tous à $\mathcal{K}$.

Q10 Montrez que cette suite est monotone.

Q11 Montrez que cette suite converge et explicitez sa limite.

► Nous nous intéressons à la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f\Big(\frac{1}{k}\Big)$.

Q12 Pour $k \geqslant 1$, prouvez l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Q13 Toujours pour $k \geqslant 1$, prouvez l'inégalité $\dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k} \leqslant f\Big(\dfrac{1}{k}\Big)$.

Q14 La suite de terme général S_n converge-t-elle ?

► Nous nous intéressons à la fonction $\varphi : t \neq 0 \mapsto \dfrac{1}{t} \ln(1 + t^2)$ si $t \neq 0$.

Q15 Explicitez $\varphi'(t)$ pour $t \neq 0$.

Q16 Montrez que φ possède une limite en 0, que vous expliciterez.

► Notons ℓ cette limite ; nous pouvons prolonger par continuité φ, en décidant que $\varphi(0) = \ell$. Nous noterons encore φ ce prolongement.

Q17 Montrez que φ est dérivable en 0, et explicitez $\varphi'(0)$.

► Notons $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt$.

Q18 Φ possède-t-elle une parité ? Si oui, laquelle ?

Q19 Pour $x > 1$, calculez $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2\ln(t)}{t}\,dt$.

Q20 Toujours pour $x \geqslant 1$, en déduire $\Phi(x) - \Phi(1) = \big(\ln(x)\big)^2 + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} \ln\Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big)\,dt$.

Q21 Donnez un équivalent simple de $\Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q22 La fonction Φ possède-t-elle une limite en $+\infty$?