

Obligatoires : copies séparées pour chaque partie ; numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives (à défaut, la note de la copie est zéro).

Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive (même remarque).

Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Problème 1 (algèbre linéaire, d'après HEC Nord, voie éco, 2006)

- ▶ Tous les vecteurs considérés dans ce problème appartiennent à \mathbb{R}^3 . Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Nous utiliserons les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $w = (0, 1, -1)$.
- ▶ Toutes les matrices considérées dans ce problème sont carrées d'ordre 3. Nous noterons \mathbf{Id} la matrice unité et $\mathbf{0}$ la matrice nulle.
- ▶ Nous noterons \mathbf{id} l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 , et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans \mathcal{B} est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

- Q1 Montrez que $\ker(f)$ est la droite vectorielle engendrée par u .
- Q2 La matrice \mathbf{A} est-elle inversible ?
- Q3 Déterminez le vecteur v de \mathbb{R}^3 dont la deuxième coordonnée dans \mathcal{B} est 1, et qui vérifie $f(v) = u$.
- Q4 Déterminez le vecteur w de \mathbb{R}^3 dont la deuxième coordonnée dans \mathcal{B} est 1, et qui vérifie $f(w) = v$.
- Q5 Montrez que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Q6 Explicitez la matrice \mathbf{N} de f dans la base \mathcal{C} .
 - ▶ Notons \mathbf{P} la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} .
- Q7 Donnez la relation liant \mathbf{A} , \mathbf{N} , \mathbf{P} et \mathbf{P}^{-1} .
- Q8 En déduire que l'on a $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ pour $k \geq 3$.
 - ▶ Notons $C_{\mathbf{N}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec \mathbf{N} .
- Q9 Montrez que $C_{\mathbf{N}}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Q10 Montrez que la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ est libre.
- Q11 Montrez que la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ est une base de $C_{\mathbf{N}}$.
 - ▶ Notons de même $C_{\mathbf{A}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec \mathbf{A} . Il est clair que $C_{\mathbf{A}}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Q12 Montrez que $C_{\mathbf{A}}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Q13 Montrez que la matrice \mathbf{M} appartient à $C_{\mathbf{A}}$ si et seulement si la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ appartient à $C_{\mathbf{N}}$.
- Q14 En déduire que $C_{\mathbf{A}}$ est le s.e.v. engendré par \mathbf{Id} , \mathbf{A} et \mathbf{A}^2 .
- Q15 Quelle est la dimension de $C_{\mathbf{A}}$?

Problème 2 (analyse et polynômes, fabrication maison)

- Nous nous intéressons à diverses questions portant sur le programme d'analyse et sur les polynômes à **coefficients réels**. Nous ne ferons pas de différence entre le polynôme P et la fonction polynôme qui lui est associée.

Q1 Énoncez et démontrez le théorème de ROLLE.

Q2 Soit P un polynôme de degré au plus n , qui possède au moins $n+1$ racines réelles distinctes. Que pouvez-vous dire de P ? Vous utiliserez le théorème de ROLLE pour établir le résultat.

Q3 Soient P et Q deux polynômes distincts, de degré au plus n . Combien l'équation $P(x) = Q(x)$ possède-t-elle de solutions *au plus*?

- Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de I dans \mathbb{R} . Nous dirons que f est *strictement convexe* si, pour x et y éléments de I distincts et $\lambda \in]0, 1[$, on a l'inégalité suivante :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Vous noterez bien que cette inégalité est **stricte** !

Q4 Montrez que la somme deux fonctions strictement convexes est strictement convexe.

Q5 Montrez que la fonction $q : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est strictement convexe.

Q6 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de I dans \mathbb{R} , strictement convexe. Montrez qu'aucune droite ne coupe la courbe représentative de f en plus de deux points.

Q7 * Montrez que la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 3 possède un centre de symétrie.

Q8 * Montrez qu'aucune fonction polynôme de degré 3 n'est strictement convexe.

Q9 Une fonction polynôme de degré 4 est-elle nécessairement strictement convexe ?

Q10 Le produit de deux fonctions strictement convexes est-il strictement convexe ?

- Dans les deux questions suivantes, g désigne une fonction polynôme de degré 1.

Q11 Montrez que la courbe représentative de la fonction sinus coupe celle de g en au moins un point.

Q12 ** Montrez que la courbe représentative de la fonction sinus coupe celle de g en un nombre fini de points.

Q13 Soit $n \geq 1$. Prouvez l'existence d'un polynôme P_n de degré n , tel que les courbes représentatives de P_n et de la fonction arctan aient au moins n points en commun.

Q14 ** Existe-t-il un polynôme P tel que les courbes représentatives de P et de la fonction arctan aient une infinité de points en commun ?

- Dans toute la suite, nous nous intéressons aux solutions de l'équation $e^x = \sin(x)$, laquelle sera notée (Eq) dans la suite. Pour $n \geq 1$, nous noterons $\mathcal{J}_n = [-2n\pi, (1-2n)\pi]$ et u la fonction $x \in \mathcal{J}_n \mapsto e^x - \sin(x)$.

Q15 Montrez que la fonction u ne s'annule en aucun point de $[-\pi, +\infty[$.

Q16 Montrez que, dans l'intervalle \mathcal{J}_n , la fonction u s'annule au moins une fois.

- Ceci prouve que la fonction u s'annule une infinité de fois.

Q17 ** Montrez que la fonction $x > 0 \mapsto -\ln(x)$ est strictement convexe. *Vous pourrez admettre ce résultat.*

Q18 En déduire que la fonction exp est strictement convexe.

Q19 Montrez que, dans l'intervalle \mathcal{J}_n , l'équation (Eq) possède exactement deux solutions. Nous noterons g_n la plus petite et d_n la plus grande.

Q20 Il résulte des questions précédentes que la plus grande solution de (Eq) est d_1 ; vous donnerez un encadrement de d_1 . Bien entendu, la prime associée sera d'autant plus importante que cet encadrement sera précis !

Q21 Donnez un équivalent *simple* de g_n lorsque n tend vers l'infini.

Q22 Montrez que la suite de terme général $a_n = g_n + 2n\pi$ converge; vous préciserez sa limite.

Q23 Donnez un équivalent *simple* de a_n lorsque n tend vers l'infini.