Sup PCSI2 — Contrôle 2006/10

Obligatoires : copies séparées pour chaque partie ; numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives (à défaut, la note de la copie est zéro).
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive (même remarque).
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Problème 1 (algèbre linéaire, d'après HEC Nord, voie éco, 2006)

- Tous les vecteurs considérés dans ce problème appartiennent à $\mathbb{R}^3$. Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous utiliserons les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $w = (0, 1, -1)$.
- Toutes les matrices considérées dans ce problème sont carrées d'ordre 3. Nous noterons $\mathbf{Id}$ la matrice unité et $\mathbf{0}$ la matrice nulle.
- Nous noterons **id** l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

Q1 Montrez que ker(f) est la droite vectorielle engendrée par u.

Q2 La matrice $\mathbf{A}$ est-elle inversible ?

Q3 Déterminez le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est 1, et qui vérifie $\mathrm{f}(v) = u$.

Q4 Déterminez le vecteur w de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est 1, et qui vérifie $\mathrm{f}(w) = v$.

Q5 Montrez que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q6 Explicitez la matrice $\mathbf{N}$ de f dans la base $\mathcal{C}$.

- Notons $\mathbf{P}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Q7 Donnez la relation liant $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^{-1}$.

Q8 En déduire que l'on a $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ pour $k \geqslant 3$.

- Notons $C_{\mathbf{N}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\mathbf{N}$.

Q9 Montrez que $C_{\mathbf{N}}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q10 Montrez que la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ est libre.

Q11 Montrez que la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ est une base de $C_{\mathbf{N}}$.

- Notons de même $C_{\mathbf{A}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\mathbf{A}$. Il est clair que $C_{\mathbf{A}}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Q12 Montrez que $C_{\mathbf{A}}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q13 Montrez que la matrice $\mathbf{M}$ appartient à $C_{\mathbf{A}}$ si et seulement si la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ appartient à $C_{\mathbf{N}}$.

Q14 En déduire que $C_{\mathbf{A}}$ est le s.e.v. engendré par $\mathbf{Id}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^2$.

Q15 Quelle est la dimension de $C_{\mathbf{A}}$?

Tournez S.V.P.

Problème 2 (analyse et polynômes, fabrication maison)

▶ Nous nous intéressons à diverses questions portant sur le programme d'analyse et sur les polynômes **à coefficients réels**. Nous ne ferons pas de différence entre le polynôme P et la fonction polynôme qui lui est associée.

Q1 Énoncez et démontrez le théorème de Rolle.

Q2 Soit P un polynôme de degré au plus n, qui possède au moins $n+1$ racines réelles distinctes. Que pouvez-vous dire de P ? Vous utiliserez le théorème de Rolle pour établir le résultat.

Q3 Soient P et Q deux polynômes distincts, de degré au plus n. Combien l'équation $P(x) = Q(x)$ possède-t-elle de solutions *au plus* ?

▶ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que f est *strictement convexe* si, pour x et y éléments de I distincts et $\lambda \in]0,1[$, on a l'inégalité suivante :

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Vous noterez bien que cette inégalité est **stricte** !

Q4 Montrez que la somme deux fonctions strictement convexes est strictement convexe.

Q5 Montrez que la fonction $q : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est strictement convexe.

Q6 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, strictement convexe. Montrez qu'aucune droite ne coupe la courbe représentative de f en plus de deux points.

Q7 ⋆ Montrez que la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 3 possède un centre de symétrie.

Q8 ⋆ Montrez qu'aucune fonction polynôme de degré 3 n'est strictement convexe.

Q9 Une fonction polynôme de degré 4 est-elle nécessairement strictement convexe ?

Q10 Le produit de deux fonctions strictement convexes est-il strictement convexe ?

▶ Dans les deux questions suivantes, g désigne une fonction polynôme de degré 1.

Q11 Montrez que la courbe représentative de la fonction sinus coupe celle de g en au moins un point.

Q12 ⋆⋆ Montrez que la courbe représentative de la fonction sinus coupe celle de g en un nombre fini de points.

Q13 Soit $n \geqslant 1$. Prouvez l'existence d'un polynôme P_n de degré n, tel que les courbes représentatives de P_n et de la fonction arctan aient au moins n points en commun.

Q14 ⋆⋆ Existe-t-il un polynôme P tel que les courbes représentatives de P et de la fonction arctan aient une infinité de points en commun ?

▶ Dans toute la suite, nous nous intéressons aux solutions de l'équation $e^x = \sin(x)$, laquelle sera notée (Eq) dans la suite. Pour $n \geqslant 1$, nous noterons $\mathcal{J}_n = [-2n\pi, (1-2n)\pi]$ et u la fonction $x \in \mathcal{J}_n \mapsto e^x - \sin(x)$.

Q15 Montrez que la fonction u ne s'annule en aucun point de $[-\pi, +\infty[$.

Q16 Montrez que, dans l'intervalle $\mathcal{J}_n$, la fonction u s'annule au moins une fois.

▶ Ceci prouve que la fonction u s'annule une infinité de fois.

Q17 ⋆⋆ Montrez que la fonction $x > 0 \mapsto -\ln(x)$ est strictement convexe. *Vous pourrez admettre ce résultat.*

Q18 En déduire que la fonction exp est strictement convexe.

Q19 Montrez que, dans l'intervalle $\mathcal{J}_n$, l'équation (Eq) possède exactement deux solutions. Nous noterons g_n la plus petite et d_n la plus grande.

Q20 Il résulte des questions précédentes que la plus grande solution de (Eq) est d_1 ; vous donnerez un encadrement de d_1. Bien entendu, la prime associée sera d'autant plus importante que cet encadrement sera précis !

Q21 Donnez un équivalent *simple* de g_n lorsque n tend vers l'infini.

Q22 Montrez que la suite de terme général $a_n = g_n + 2n\pi$ converge ; vous préciserez sa limite.

Q23 Donnez un équivalent *simple* de a_n lorsque n tend vers l'infini.