Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Problème 1 : algèbre linéaire

▶ Soient $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Nous notons $\mathbf{t} = \mathbf{r} \circ \mathbf{s} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}$.

Q1 Montrez que $\mathbf{r} \circ \mathbf{s}$ est un projecteur si et seulement si $\mathbf{t}\big(\mathrm{im}(\mathbf{s})\big) \subset \ker(\mathbf{r})$.

▶ Nous supposons désormais que $\mathbf{r} \circ \mathbf{s}$ est un projecteur.

Q2 Montrez que $\mathrm{im}(\mathbf{r} \circ \mathbf{s}) = \big(\ker(\mathbf{r}) + \mathrm{im}(\mathbf{s})\big) \cap \mathrm{im}\,\mathbf{r}$.

Q3 Montrez que $\ker(\mathbf{r} \circ \mathbf{s}) = \mathbf{s}^{-1}\big(\ker(\mathbf{r})\big)$.

Q4 Montrez que $\ker(\mathbf{r} \circ \mathbf{s}) = \big(\ker(\mathbf{r}) \cap \mathrm{im}(\mathbf{s})\big) \oplus \ker(\mathbf{s})$.

▶ Notez bien que, dans la question 3, la notation $\mathbf{s}^{-1}$ ne signifie pas que $\mathbf{s}$ est bijectif !

Problème 2 : analyse

▶ Nous commençons par quelques questions de cours.

Q1 Donnez l'expression de $\dfrac{d^k}{dt^k}\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$, pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Vous prouverez cette expression.

Q2 En déduire l'expression de $\dfrac{d^k}{dt^k}\big(\ln(t)\big)$, pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

Q3 Énoncez la formule de Leibniz ; aucune preuve n'est demandée.

▶ $\mathcal{I}$ désigne l'intervalle $]0, e[$. Notons $\varphi :\ t \in \mathcal{I} \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$.

Q4 Montrez que φ réalise une bijection de $\mathcal{I}$ sur un intervalle $\mathcal{J}$ que vous préciserez.

Q5 Montrez que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q6 Donnez les expressions de $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$;

Q7 Que pouvez-vous dire concernant la convexité de φ ?

Q8 Montrez que φ^{-1} est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

▶ Au vu des expressions de $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$, il est raisonnable d'énoncer l'assertion suivante, qui sera notée $\mathcal{A}(n)$:

$$\boxed{\text{il existe des réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } \varphi^{(n)}(t) = \frac{a_n + b_n \ln(t)}{t^{n+1}} \text{ pour tout réel } t \in \mathcal{I}}$$

Q9 Au moyen d'un raisonnement par récurrence, prouvez que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q10 Donnez l'expression de b_n en fonction de n.

Q11 Donnez l'expression de a_n en fonction de n ; vous ferez intervenir $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$; par convention, $H_0 = 0$.

Q12 En dérivant n fois l'égalité $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} \times \ln(t)$ avec la formule de Leibniz, retrouvez l'expression de $\varphi^{(n)}(t)$.

Q13 Explicitez le $DL_n(1)$ de φ.

Tournez S.V.P.

Problème 3, d'après une épreuve du concours ESTP 1995)

► E désigne le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. $\mathbf{H}$ désigne le $\mathbb{R}$-e.v.$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$. Soit $f \in E$; nous lui associons $\mathbf{T}(f) \in \mathbf{H}$, définie par

$$\big(\mathbf{T}(f)\big)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}\,dt \qquad \text{pour tout } x > 0$$

Vous noterez soigneusement le rôle des parenthèses dans $\big(\mathbf{T}(f)\big)(x)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Dans le cadre de ce problème, la notation $\mathbf{T}\big(f(x)\big)$ a-t-elle un sens ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Justifiez *brièvement* l'existence de $\mathbf{T}(f)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que $\mathbf{T}$ est une application linéaire.

► Dans les quatre questions suivantes, nous notons $f(t) = e^t$ et $F = \mathbf{T}(f)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Au moyen d'un changement de variable *très simple*, montrez que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Simplifiez alors $G(x) = F(x) + F'(x)$ pour $x > 0$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Rappelez le $DL_n(0)$ de la fonction $\varphi :\ u > -1 \mapsto \dfrac{1}{1+u}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Déterminez des constantes a, b et c telles que $G(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3} + o\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $f_n :\ t \in [0,1] \mapsto t^n$, et $\mathbf{J}_n = \mathbf{T}(f_n)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Calculez $\mathbf{J}_0(x)$ pour $x > 0$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Écrivez une relation liant $\mathbf{J}_{n+1}(x)$ et $\mathbf{J}_n(x)$ pour $x > 0$. Indication : $t = (x+t) - x$.

$\boxed{\text{Q10}}$ En déduire $\mathbf{J}_n(x) = (-x)^n \ln\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big) + P_n(x)$, où P_n est une fonction polynôme que vous expliciterez.

$\boxed{\text{Q11}}$ Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n.

$\boxed{\text{Q12}}$ Que pouvez-vous dire de la famille $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$?